



APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA

VOLUMES

DISCIPLINA: CÁLCULO II (LOB1004)

Profa. Diovana A. S. Napoleão

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS BÁSICAS E AMBIENTAIS

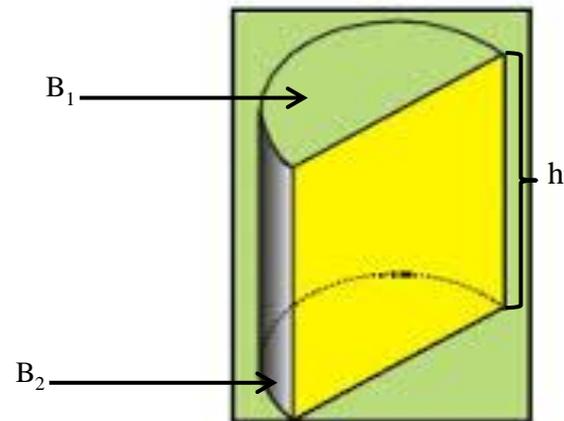
VOLUME POR FATIAMENTO E ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO

- Começamos com um tipo simples de sólido chamado **cilindro** (ou, mais precisamente, um **cilindro reto**). Como ilustrado na Figura 1(a), um cilindro é delimitado por uma **região plana B1**, denominada **base**, e uma **região congruente B2** em um plano paralelo. O cilindro consiste em todos os pontos nos segmentos de reta perpendiculares à base que unem B1 a B2.

Se a área da base é A e a altura do cilindro (distância de B1 a B2) é h , então, o volume V do cilindro é definido como:

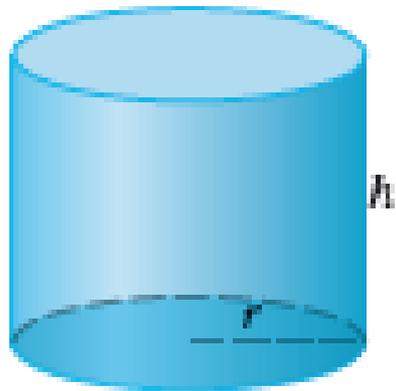
$$V = A \cdot h$$

Figura 1(a)

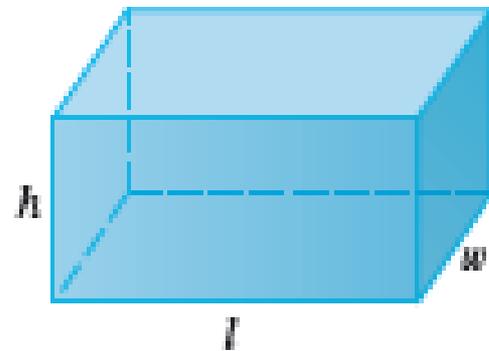


VOLUME POR FATIAMENTO E ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO

Em particular, se a base é um círculo com raio r , então o cilindro é um cilindro circular com o volume $V = \pi r^2 h$, Figura 1(b), e se a base é um retângulo com comprimento l e largura w , então o cilindro é uma caixa retangular (também denominado paralelepípedo retangular) com o volume $V = l \cdot w \cdot h$, Figura 1(c).



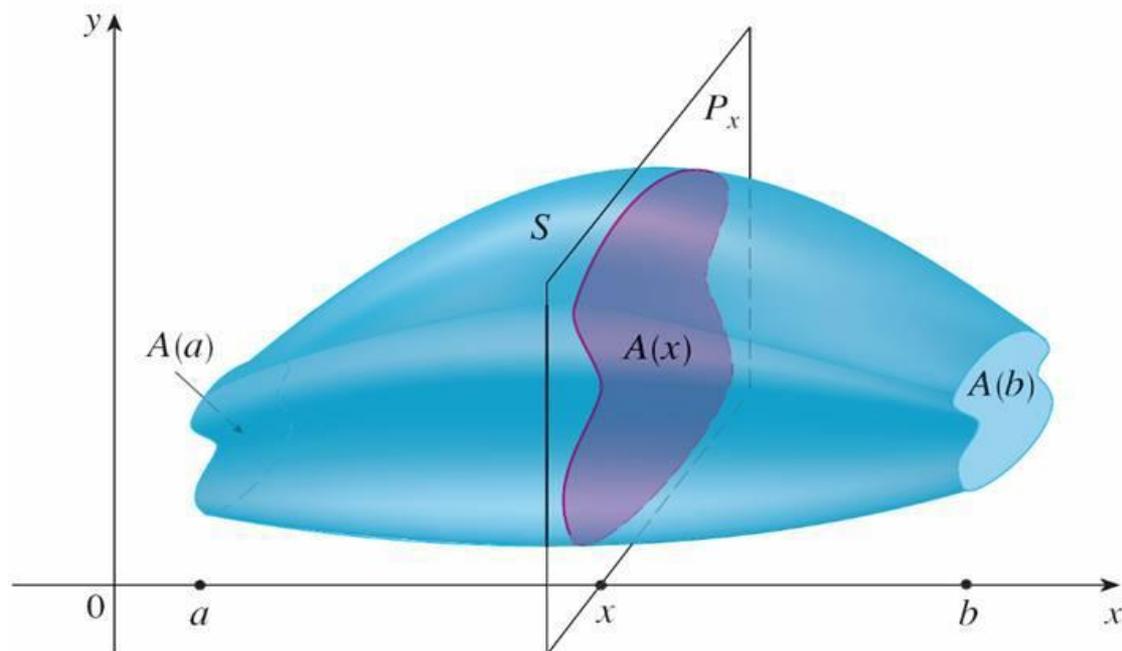
(b) Cilindro circular $V = \pi r^2 h$



(c) Caixa retangular $V = lwh$

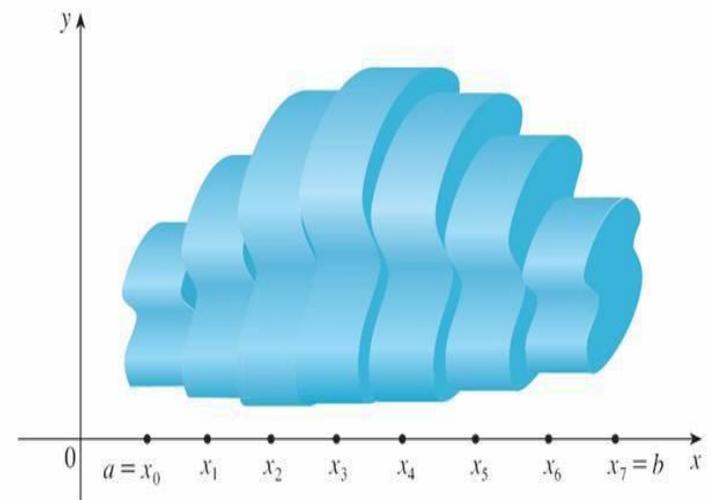
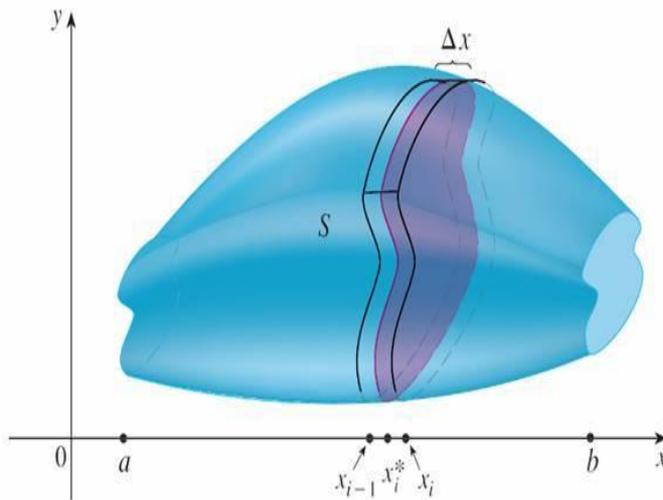
VOLUME POR FATIAMENTO E ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO

Seja $A(x)$ a área da secção transversal de S no plano P_x perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto x , onde $a \leq x \leq b$, Figura 2. Fatiando a região S e passando por x , calcule a área de uma fatia. A área da secção transversal $A(x)$ irá variar quando x aumenta de a até b .

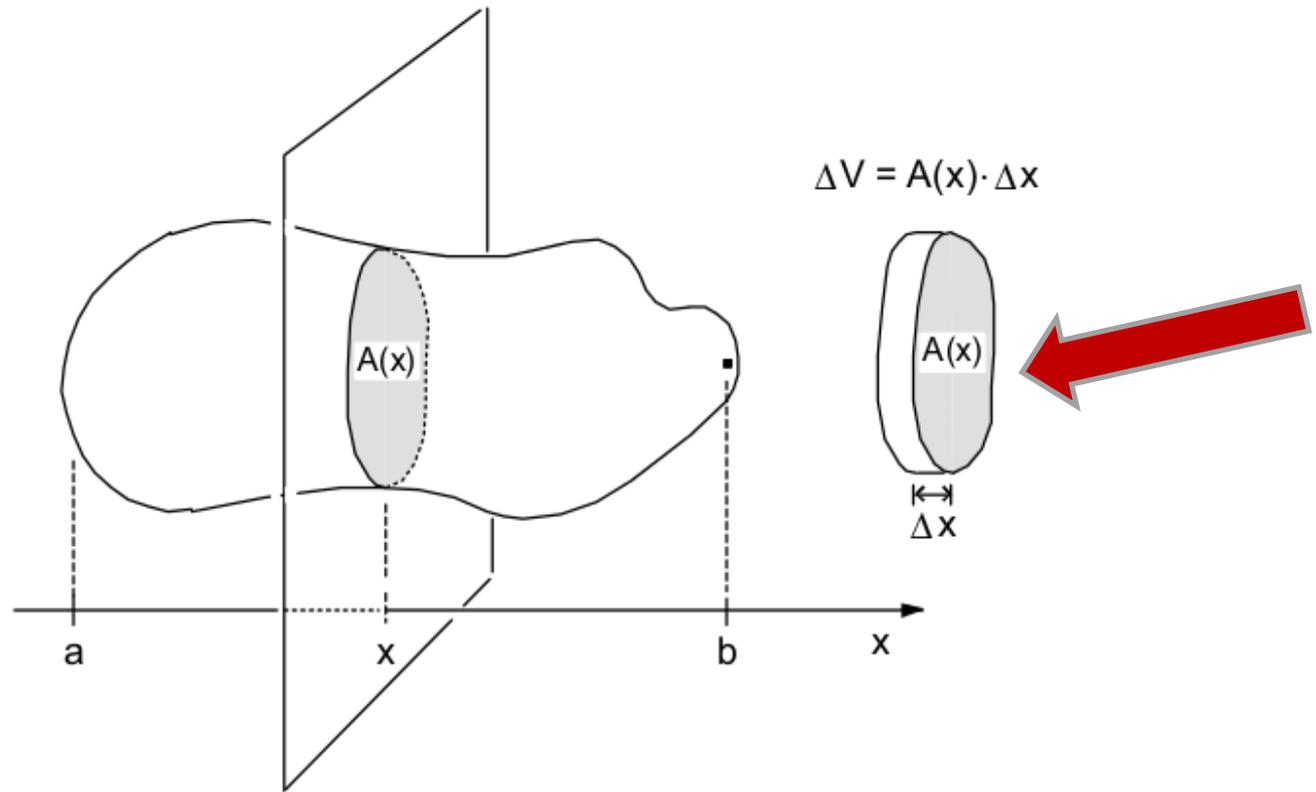


1-VOLUME POR FATIAMENTO E ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO

- Vamos dividir S em n “fatias” de larguras iguais Δx usando os planos P_{x_1}, P_{x_2}, \dots para fatiar o sólido. Se escolhermos pontos amostrais x_i^* em $[x_{i-1}, x_i]$, poderemos aproximar a i -ésima fatia S_i (a parte de S que está entre os planos $P_{x_{i-1}}$ e P_{x_i}) a um cilindro com área de base $A(x_i^*)$ e “altura” Δx , conforme Figura 3.



VOLUME POR FATIAMENTO E ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO



Adicionando os volumes dessas fatias, obtemos uma aproximação para o volume total (isto é, o que pensamos intuitivamente como volume):

$$V \approx \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x$$

VOLUME POR FATIAMENTO E ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO

- Esta aproximação parece quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, definimos o volume como o limite dessas somas quando $n \rightarrow \infty$. Mas reconhecemos o limite da soma de Riemann como uma integral definida, e dessa forma temos a seguinte definição.

Definição de volume Seja S um sólido que está entre $x = a$ e $x = b$. Se a área da secção transversal de S no plano P_x , passando por x e perpendicular ao eixo x , é $A(x)$, onde A é uma função contínua, então o volume de S é

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x = \int_a^b A(x) dx.$$

2- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO DISCO

Um sólido gerado pela rotação de uma região plana em torno de um eixo no plano é denominado sólido de revolução. Para determinar o volume de um sólido, precisamos somente observar que a área da seção transversal $A(x)$ é um disco de raio $R(x)$, a distância entre a fronteira da região bidimensional é o eixo de revolução. A área é portanto:

$$A(x) = \pi(\text{Raio})^2$$

$$A(x) = \pi R(x)^2$$

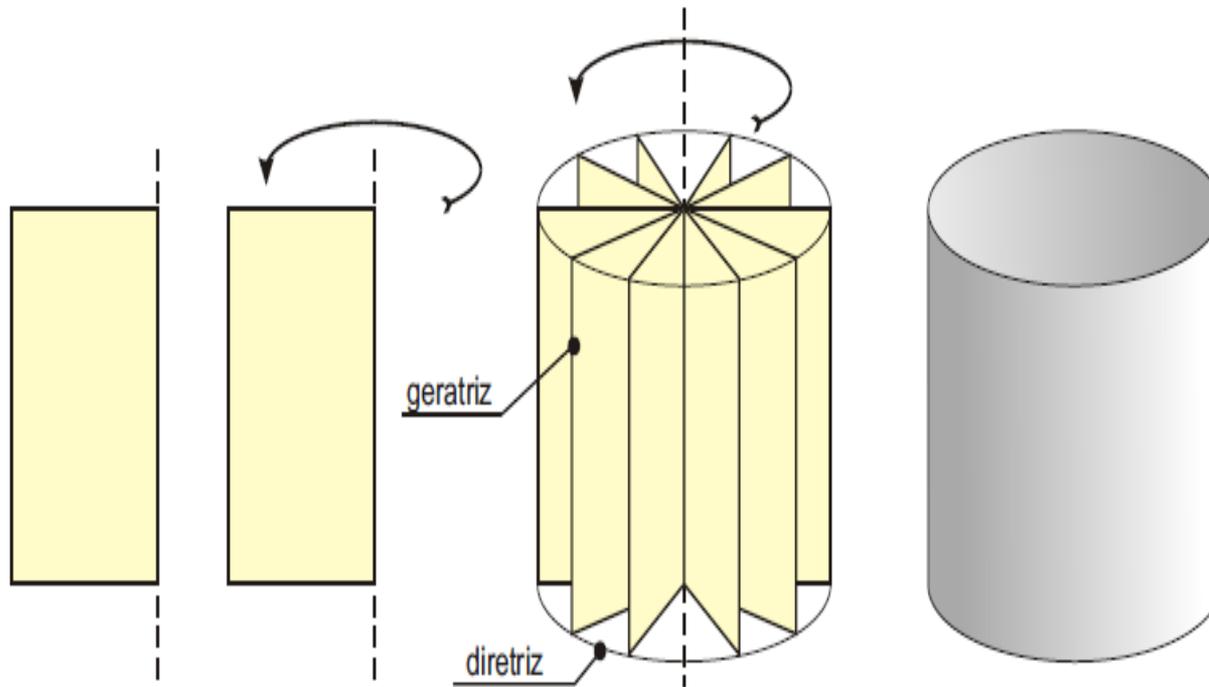
Com base na definição de volume, tem-se:

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \pi [R(x)]^2$$

2- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO DISCO

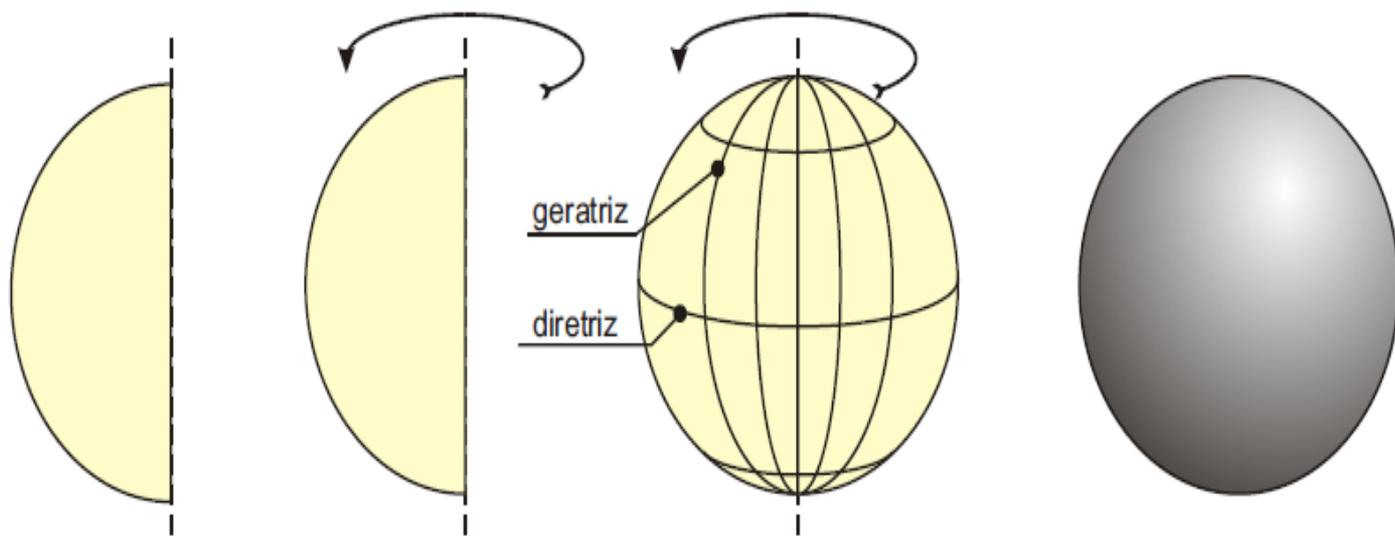
ALGUNS EXEMPLOS DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO:

Cilindro - Sólido de revolução gerado através da rotação de um retângulo em torno de um eixo coincidente com um de seus lados.



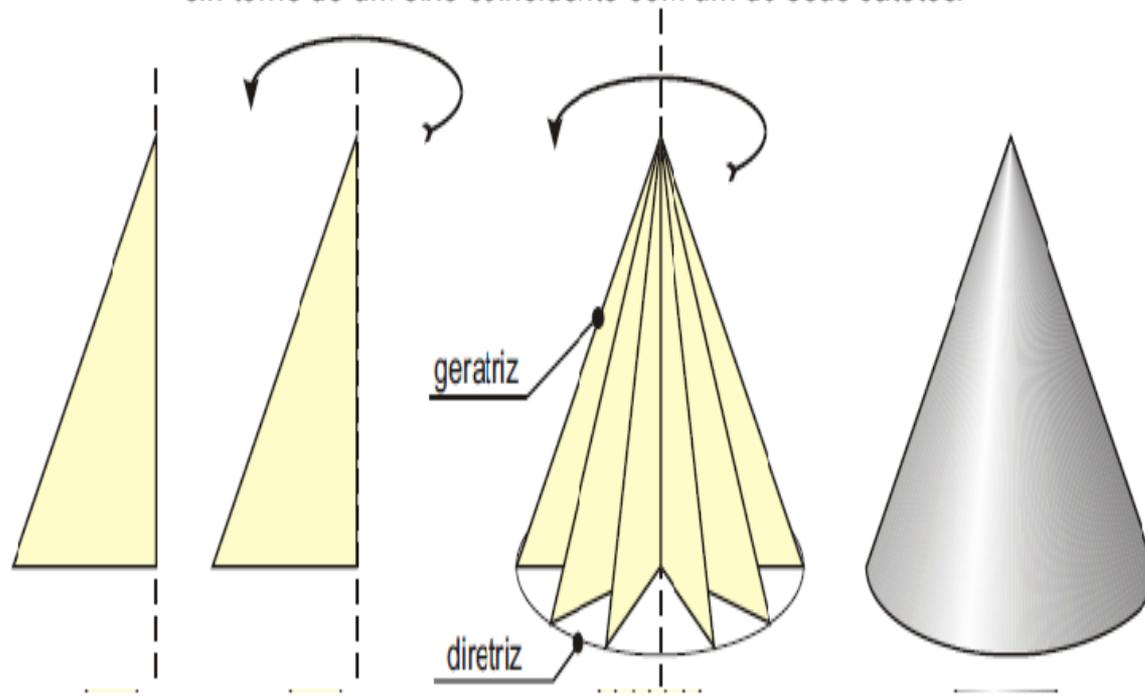
2- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO DISCO

- **Esfera** - Sólido de revolução gerado através da rotação de uma semi - circunferência em torno de um eixo coincidente com o diâmetro.

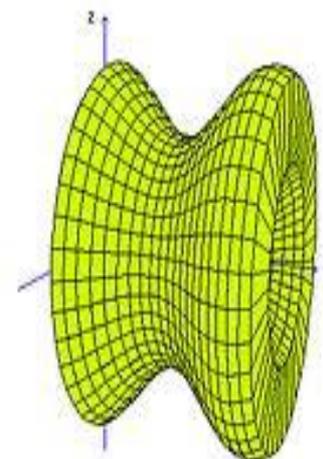
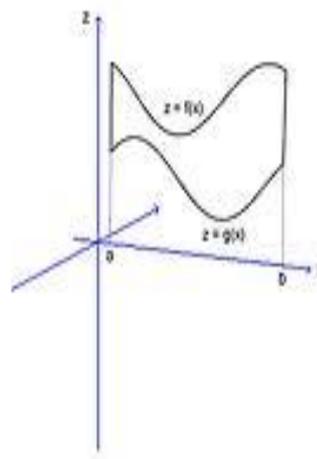
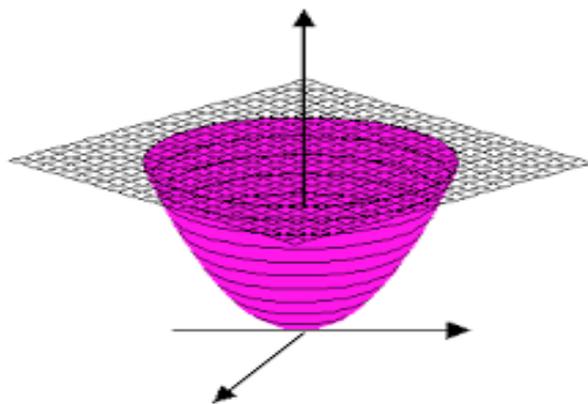
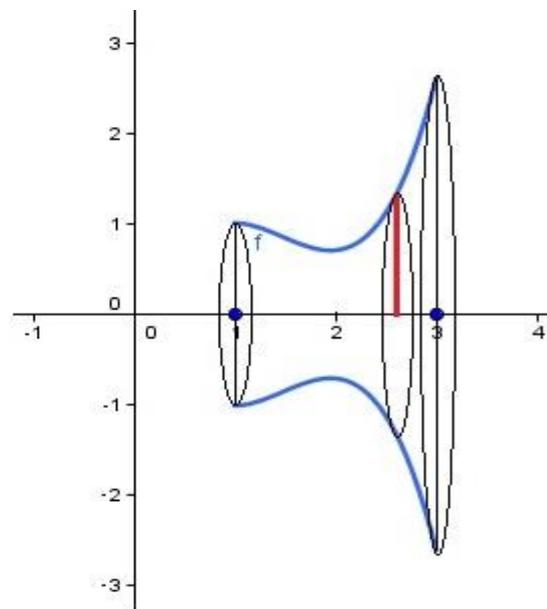
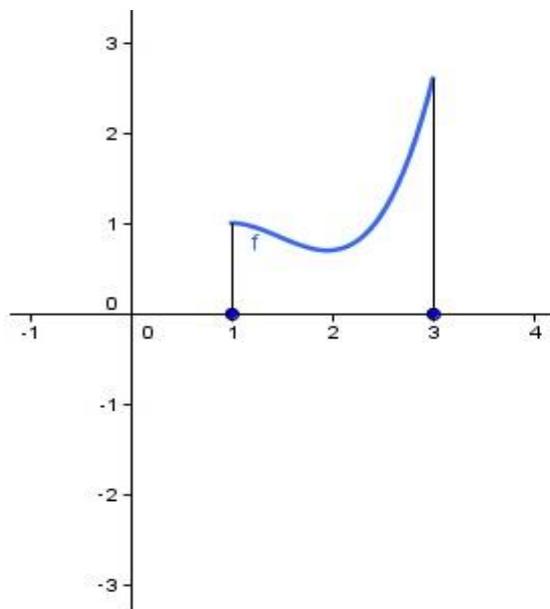


2- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO DISCO

Cone - Sólido de revolução gerado através da rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo coincidente com um de seus catetos.



2- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO DISCO



2- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO DISCO

Definição 2: Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e seja R a região delimitada pelo gráfico de f , pelo eixo Ox e pelas retas verticais $x=a$ e $x=b$.

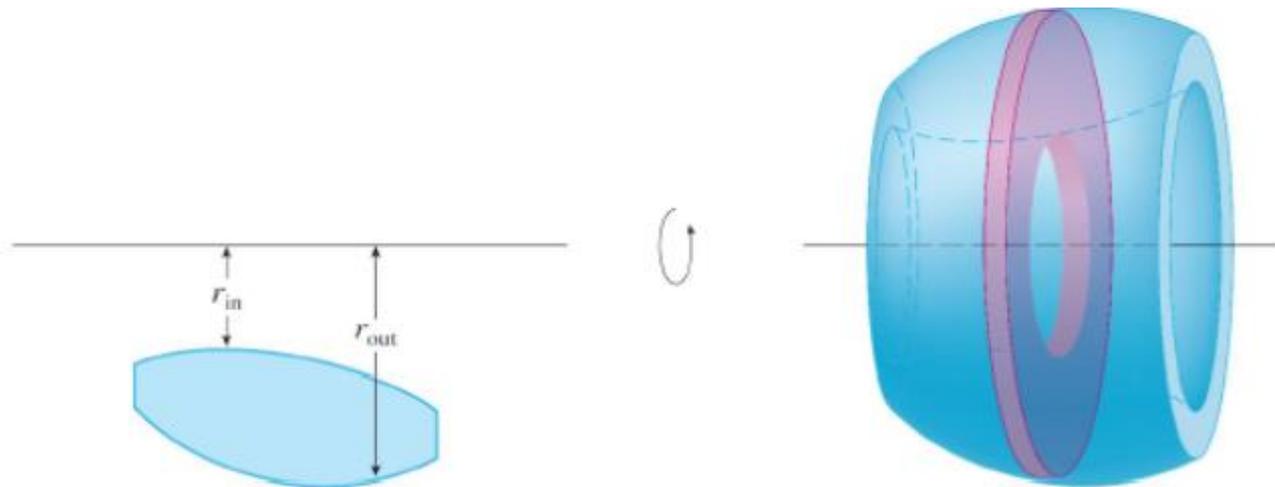
O volume V do sólido gerado pela revolução de R em torno do eixo Ox é:

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

Se uma região revolve em torno de uma reta no plano, o sólido resultante é um sólido de revolução.

3- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO ANEL (ARRUELAS)

- O método dos discos pode ser estendido para sólidos de revolução com buracos, substituindo o disco representativo por um anel (arruela). A arruela é formada pela revolução de um retângulo em torno de um eixo (x ou y). Consideraremos a região limitada por um raio externo $R(x)$ e por um raio interno $r(x)$, conforme a figura apresentada:

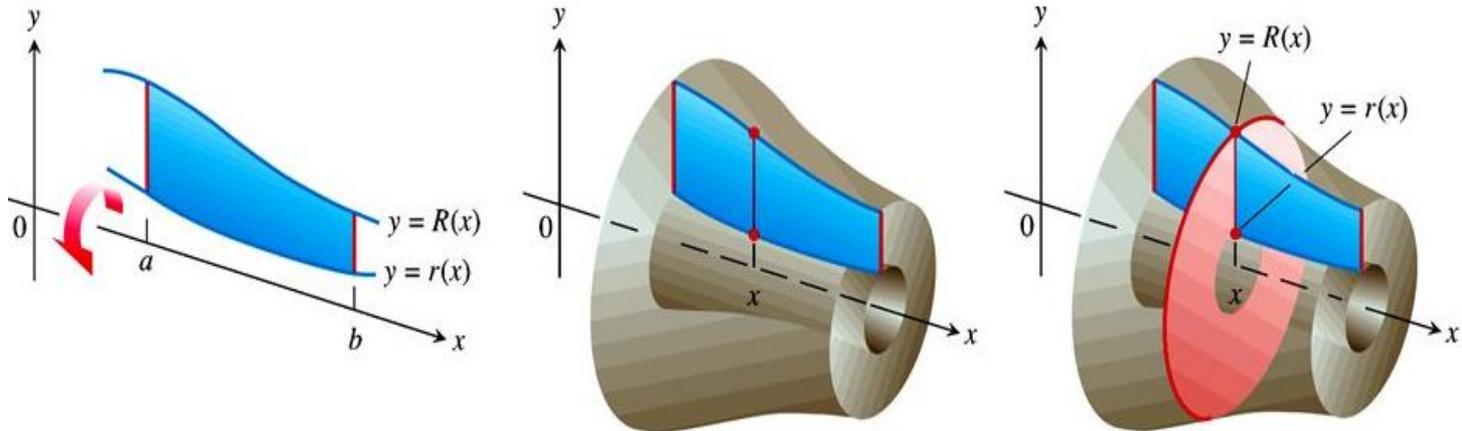


$$V = \pi(\text{raio externo})^2 - \pi(\text{raio interno})^2$$

3- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO ANEL (ARRUELAS)

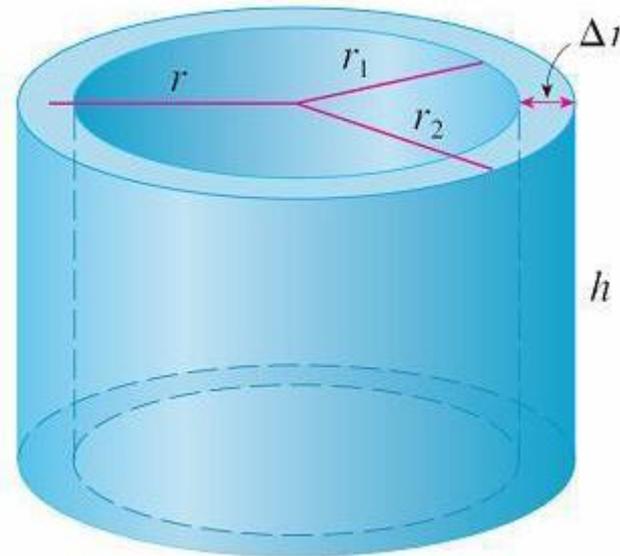
Se a região de sólido de revolução gira em torno do seu eixo de revolução o volume será expresso por:

$$V = \pi \int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2) dx$$



4- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: VOLUME POR CASCAS CILÍNDRICAS

No método das cascas cilíndricas tomaremos o cilindro como exemplo e o consideraremos como um anel, conforme a figura:



A Figura apresenta uma casca cilíndrica com raio interno r_1 raio externo r_2 e altura h .

4- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: VOLUME POR CASCAS CILÍNDRICAS

Seu volume V é calculado subtraindo o volume V_1 do cilindro interno a partir do volume V_2 do cilindro externo:

$$V = V_2 - V_1 = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h$$

$$V = \pi (r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h$$



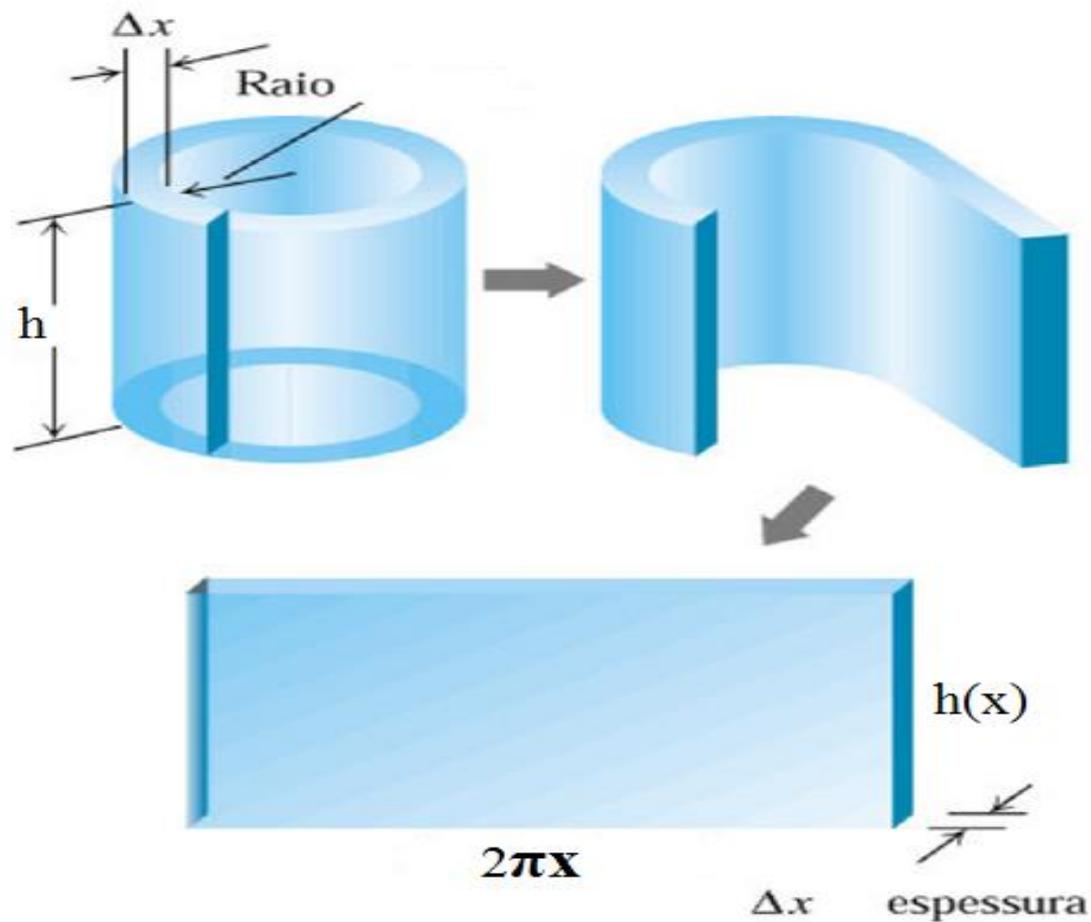
$$(r_2 + r_1)$$

$$V = 2\pi r h \Delta r$$

Logo a fórmula para o volume de casca cilíndrica será:

$$V = 2\pi r .h. \Delta r$$

4- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: VOLUME POR CASCAS CILÍNDRICAS



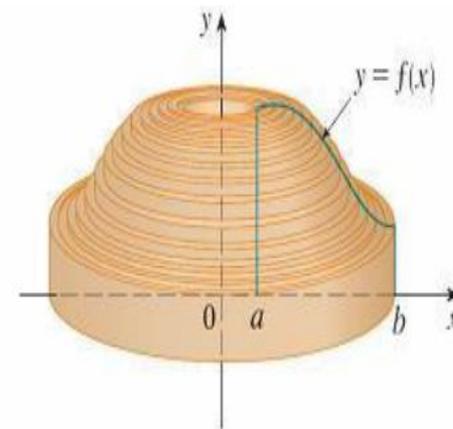
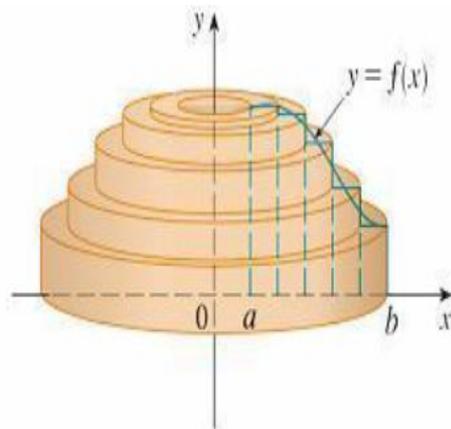
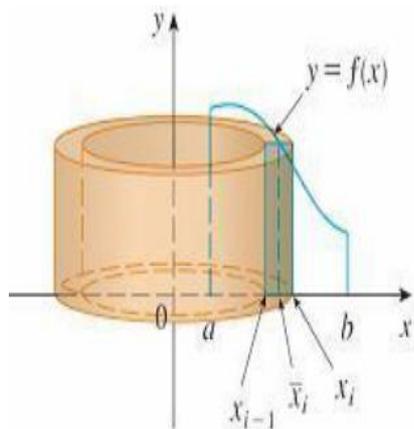
$$V = \int_a^b (2\pi x) \cdot [h(x)] dx$$

4- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: VOLUME POR CASCAS CILÍNDRICAS

Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ da mesma largura Δx e consideramos o ponto médio do i -ésimo subintervalo.

Se o retângulo com base $[x_{i-1}, x_i]$ e altura $f(x_i)$ é girado ao redor do eixo y , então o resultado é uma casca cilíndrica com raio médio, altura, e espessura Δx , assim, pela fórmula seu volume será:

$$V_i = (2\pi \bar{x}_i)[f(\bar{x}_i)] \Delta x$$



4- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: VOLUME POR CASCAS CILÍNDRICAS

Portanto, uma aproximação para o volume V de S é dada pela soma dos volumes dessas cascas:

$$V \approx \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i) \Delta x$$

Essa aproximação parece tornar-se cada vez melhor quando $n \rightarrow \infty$. Mas, pela definição de uma integral, sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i) \Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

4- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: VOLUME POR CASCAS CILÍNDRICAS

Por definição:

O volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y (eixo x) da região sob a curva $y=f(x)$ de a até b

$$V = \int_a^b (2\pi x) \cdot [h(x)] \, dx$$