PLANTÃO DE DÚVIDAS DO DIA 20 DE SETEMBRO

LISTA 4

4) Determine um conjunto gerador para cada um dos subespaços W do espaço vetorial V.

a) $V = \mathbb{R}^4$, e $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x, y, z \text{ e } t \text{ estão em P.A.}\}$.

RESOLUÇÃO.

Seja $w := (x,y,z,t)$ em W. Como $w \in W$, x, y, z e t estão em P.A. Logo, podemos fixar $r \in \mathbb{R}$ de modo que $y = x + r$, $z = y + r = (x+r)+r = x+2r$, e $t = z + r = (x+2r)+r = x+3r$. Feito isso, notemos que

$$w = (x,y,z,t) = (x, x+r, x+2r, x+3r)$$
$$= (x,x,x,x) + (0, r, 2r, 3r)$$
$$= x(1,1,1,1) + r(0,1,2,3).$$

Logo, resulta da arbitrariedade de w em W que

$$\{(1,1,1,1), (0,1,2,3)\}$$

é um conjunto gerador de W.

b) $V = \mathbb{R}^4$, e $W = \left\{ \begin{array}{l} (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x, y, z \text{ e } t \text{ formam uma P. G. de razão} \\ \text{fixa } q \end{array} \right\}$.

RESOLUÇÃO.

Seja (x,y,z,t) em W. Como, por hipótese, x, y, z e t formam uma P.G. de razão q, $y = qx$, $z = qy = q(qx) = q^2x$, e $t = qz = q(q^2x) = q^3x$. Sendo assim,

$$(x,y,z,t) = (x, qx, q^2x, q^3x) = x(1, q, q^2, q^3).$$

E, como (x,y,z,t) em W é arbitrário, disso concluímos que $\{(1, q, q^2, q^3)\}$ é um conjunto gerador de W.

c) $V = M_3(\mathbb{R})$, e $W = \{A \in V : A \text{ é simétrica}\}$.

RESOLUÇÃO.

Seja $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ em W. Como, por hipótese, A é simétrica,

$$\begin{cases} a_{21} = a_{12} \\ a_{31} = a_{13} \\ a_{32} = a_{23} \end{cases}.$$

Logo,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}} + a_{12} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}+E_{21}}$$

$$+ a_{13} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{13}+E_{31}} + a_{22} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{22}}$$

$$+ a_{23} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{23}+E_{32}} + a_{33} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{33}}$$

— a partir do que concluímos, em vista da arbitrariedade de A em W, que

$$\{E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}+E_{21}, E_{13}+E_{31}, E_{23}+E_{32}\}$$

é um conjunto gerador de W.