Física IV (IF 2022)
Aula 18

- Objetivos de aprendizagem:
  - Reconhecer a notação complexa para descrição de ondas eletromagnéticas
  - Reconhecer o vetor de Poynting complexo
  - Obter os valores médios da densidade de energia, do vetor de Poynting, e da intensidade da onda eletromagnética a partir dos campos E e B complexos

Notação complexa

Onda eletromagnética plana monocromática se propagando na direção e sentido de $\hat{z}$ (o.e.m.p.m.)

$$\underbrace{\vec{E}(z,t)}_{\text{Reais}}=\Re\left(\underbrace{\vec{E}(z)}_{\text{Complexos}}e^{-i\omega t}\right)$$

$$\vec{B}(z,t)=\Re\left(\vec{B}(z)e^{-i\omega t}\right)$$

Parte Real:
Re (…) ou

Reais

Complexos

Cuidado com a notação… não é muito clara! $\vec{E}$ ou $\vec{E}(z)$ são complexos

Como ficam produtos de campos complexos, como o vetor de Poynting? $\underbrace{\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})}_{\text{Reais}}$

Em geral $\Re(Z_1 Z_2)\neq\Re(Z_1)\Re(Z_2)$

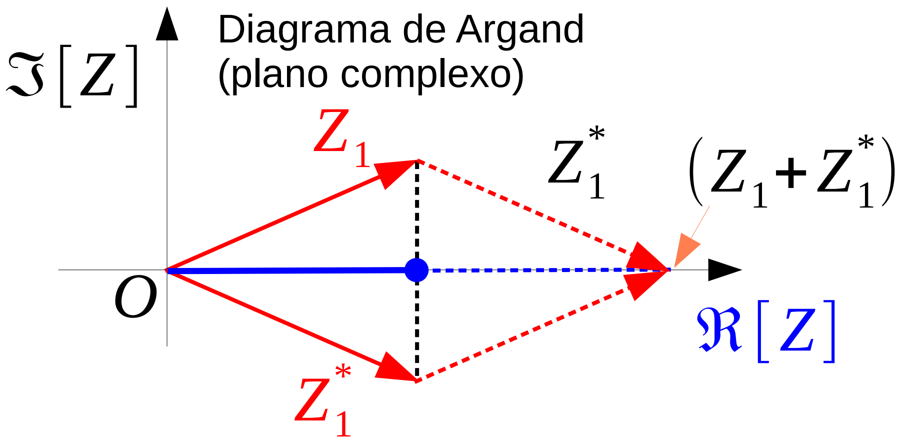
Reais

Obtendo a parte real de número complexo

- Metade da soma do número com seu complexo conjugado

$$\Re(Z_1) = \frac{1}{2}(Z_1 + Z_1^*)$$

$$\begin{array}{rl} & Z_1 = A_1 + iB_1 \\ + & Z_1^* = A_1 - iB_1 \\ \hline & Z_1 + Z_1^* = 2A_1 = 2\Re(Z_1) \end{array}$$

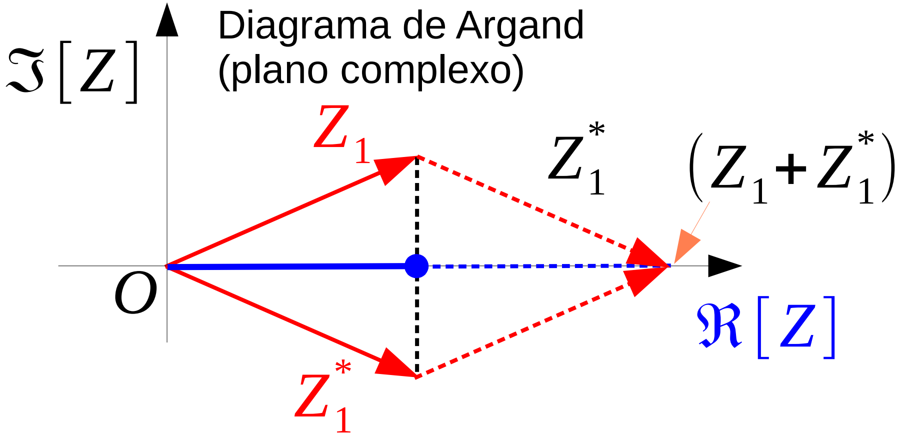


Obtendo a parte real de número complexo

- Metade da soma do número com seu complexo conjugado

$$\Re(Z_1) = \frac{1}{2}(Z_1 + Z_1^*)$$

$$\begin{array}{rl} & Z_1 = A_1 + iB_1 \\ + & Z_1^* = A_1 - iB_1 \\ \hline & Z_1 + Z_1^* = 2A_1 = 2\Re(Z_1) \end{array}$$



- Mostrar que:

$$\text{Se } Z_1 = a\,e^{-i\omega t},\; Z_2 = b\,e^{-i\omega t},\; \langle \Re(Z_1)\Re(Z_2)\rangle = \frac{1}{2}\Re(a^* b) = \frac{1}{2}\Re(a\,b^*)$$

(em geral interessam os valores médios das quantidades envolvidas na onda E.M.)

Densidades de energia e S^+ (médias)

1) Densidades de energia elétrica e magnética na notação complexa
2) Onda plana – igualdade das energias médias
3) Vetor de Poynting médio e vetor de Poynting complexo
4) Potência como fluxo de S
5) Intensidade da onda

Densidades de energia e S+ (médias)

1) Densidades de energia elétrica e magnética na notação complexa

a) Dens. de en. Elétrica: $\langle u_E \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \kappa \langle |\vec{E}(z,t)|^2 \rangle$

b) Onde: $\vec{E}(z,t) = \Re(\vec{E}(z) e^{-i\omega t})$ é o campo real da "o.e.m.p.m."

c) Usar: $\langle \Re(Z_1) \Re(Z_2) \rangle = \frac{1}{2} \Re(a^* b) = \frac{1}{2} \Re(a b^*)$

d) Obter: $\langle u_E \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \kappa |\vec{E}|^2$ (onde $\vec{E} = \vec{E}(z)$ é o campo complexo)

e) Analogamente, para o campo magnético: $\langle u_B \rangle = \frac{1}{4 \mu_0} |\vec{B}|^2$

Densidades de energia e S^+ (médias)

2) Onda e.m. – igualdade das energias médias

a) Sendo uma o.e.m.: $\vec{B}=\frac{\hat{z}}{v}\times\vec{E}$

b) Mostrar que: $\langle u_B\rangle=\langle u_E\rangle$

Densidades de energia e S^+ (médias)

3) Vetor de Poynting médio e vetor de Poynting complexo

a) Definindo o V.P. complexo: $\vec{S}^+ = \frac{1}{2\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}^*$

(Campos na notação complexa)

b) Mostrar que: $\langle \vec{S} \rangle = \Re(\vec{S}^+) = v \frac{1}{2} \kappa \varepsilon_0 |\vec{E}|^2 \hat{u}$

Conferindo os resultados

- Densidades de energia: $\langle u_E \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \kappa |\vec{E}|^2$ $\langle u_B \rangle = \frac{1}{4\mu_0} |\vec{B}|^2$ (iguais na o.e.m)

- Vetor de Poynting complexo: $\vec{S}^{+} = \frac{1}{2\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}^{*}$

- Vetor de Poynting médio: $\langle \vec{S} \rangle = \Re(\vec{S}^{+}) = v \frac{1}{2} \kappa \varepsilon_0 |\vec{E}|^2 \hat{u}$

- Potência como fluxo de S: $\langle P \rangle = \int_A \langle \vec{S} \rangle . \hat{n}\, da$

- Intensidade da onda eletromagnética: $I = \langle \vec{S} \rangle . \hat{u} = \frac{1}{2} \kappa \varepsilon_0 v |\vec{E}|^2$