Primeira prova de Álgebra Linear I (tipo B)

Denis de Assis Pinto Garcia

18 de setembro de 2023

Exercício 1.

Para que valores de a e de b o sistema linear

$$\begin{cases} x+y+z &= a \\ x+by+3z &= 2 \\ bx+y+2z &= 3 \end{cases} :$$

(a) possui uma única solução;

(b) possui infinitas soluções;

(c) não possui soluções.

Resolução.

Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \mid & a \\ 1 & b & 3 & \mid & 2 \\ b & 1 & 2 & \mid & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2' := L_2 - L_1 \\ L_3' := L_3 - bL_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \mid & a \\ 0 & b-1 & 2 & \mid & 2-a \\ 0 & 1-b & 2-b & \mid & 3-ab \end{bmatrix} \underset{L_3'' := L_3' + L_2'}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \mid & a \\ 0 & b-1 & 2 & \mid & 2-a \\ 0 & 0 & 4-b & \mid & 5-a-ab \end{bmatrix},$$

o sistema do enunciado é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x+y+z &= a \\ (b-1)y+2z &= 2-a \\ (4-b)z &= 5-a-ab \end{cases} . \qquad (*)$$

Por conta disso, dividiremos nossa análise em dois casos.

Primeiro caso: $b = 4$.

Se $b = 4$, o sistema $(*)$ é equivalente a

$$\begin{cases} x+y+z &= a \\ 3y+2z &= 2-a \\ 0 &= 5-5a \end{cases} ,$$

o qual não possui soluções se $a \neq 1$ (pois $a \neq 1 \Rightarrow 5-5a \neq 0$) e possui infinitas soluções se $a = 1$ — já que, nesse caso,

$$\begin{cases} x+y+z &= a \\ 3y+2z &= 2-a \\ 0 &= 5-5a \end{cases} \sim \begin{cases} x &= 1-y-z \\ 3y &= 1-2z \end{cases} \sim \begin{cases} x &= \frac{2-z}{3} \\ y &= \frac{1-2z}{3} \end{cases} .$$

Segundo caso: $b \neq 4$.

Se $b \neq 4$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & a \\ (b-1)y+2z & = & 2-a \\ (4-b)z & = & 5-a-ab \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & a-z \\ (b-1)y & = & 2-a-2z \\ z & = & \frac{5-a-ab}{4-b} \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & \frac{5a-5}{4-b} \\ (b-1)y & = & \frac{3ab-2a-2b-2}{4-b} \\ z & = & \frac{5-a-ab}{4-b} \end{array}\right. ,$$

e é fácil ver que, nessa situação, o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & \frac{5a-5}{4-b} \\ (b-1)y & = & \frac{3ab-2a-2b-2}{4-b} \\ z & = & \frac{5-a-ab}{4-b} \end{array}\right. : \tag{$**$}$$

(i) possui uma única solução, se $b \neq 1$ — pois, nesse caso, cada linha da matriz dos coeficientes do sistema ($**$) possui pivô;

(ii) não possui soluções, se $b = 1$, e se $a \neq 4$ — pois, nesse caso, $b-1=0$, e $3ab-2a-2b-2 = a-4 \neq 0$;

(iii) possui infinitas soluções, se $b = 1$, e se $a = 4$ — pois, nesse caso, o sistema ($**$) é equivalente a

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 5-y \\ z & = & 1 \end{array}\right. .$$

Por fim, como sistemas lineares equivalentes possuem as mesmas soluções, podemos concluir, em vista da nossa análise, que o sistema do enunciado:

- possui uma única solução, se b é diferente de 4 e de 1;
- possui infinitas soluções, se $b = 4$, e $a = 1$, ou se $b = 1$, e $a = 4$;
- não possui soluções, se $b = 4$, e $a \neq 1$, ou se $b = 1$, e $a \neq 4$.

Exercício 2.

As afirmações a seguir são **VERDADEIRAS** ou **FALSAS**? Justifique! Prove as verdadeiras e, quando a afirmação for falsa, exiba um contraexemplo.

(a) Todo sistema linear com mais incógnitas do que equações sempre tem solução.

(b) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, então $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.

(c) Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$. Se A tem uma linha de zeros, então AB tem uma linha de zeros.

Resolução.

(a) A afirmação é falsa. Com o efeito, o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ 0 & = & 1 \end{array}\right.$$

tem mais incógnitas do que equações, mas não possui soluções.

(b) A afirmação é falsa, pois, se $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, e se $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, então

$$A^2 - B^2 = A \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (A-B)(A+B).$$

Observação: para perceber que a afirmação é falsa, basta notar que, se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, então, como

$$(A-B)(A+B) = (A-B)A + (A-B)B = AA - BA + AB - BB = A^2 + AB - BA - B^2,$$

$(A-B)(A+B)$ será igual a $A^2 - B^2$ se, e somente se, AB for igual a BA — o que, por sua vez, não é necessariamente verdade.

(c) A afirmação é verdadeira. Com efeito, se $i \in \{1, \ldots, m\}$ é tal que $A^{(i)} = 0_{1\times n}$, então, como

$$(AB)^{(i)} = A^{(i)}B,$$

$(AB)^{(i)} = 0_{1\times n} \cdot B = 0_{1\times p}$.

Exercício 3. Determine quais subconjuntos W do espaço vetorial V são subespaços de V.

(a) $V = \mathbb{R}^3$, e $W = \{(x+y, x+2y, x+3y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(b) $V = M_n(\mathbb{R})$, e $W = \{X \in V : XA = 0_n\}$, em que $A \in V$ é uma matriz fixa.

(c) $V = P_3(\mathbb{R})$, e $W = \{p \in V : p(1) = 0\}$.

(d) $V = \mathbb{R}^3$, e $W = \{(x, y, z) \in V : z = x^2 - y^2\}$.

Resolução.

(a) O conjunto W é um subespaço vetorial de V, pois:

  (i) $(0,0,0) \in W$ (já que $(0,0,0) = (0+0, 0+2\cdot 0, 0+3\cdot 0)$);

  (ii) se $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, se $u := (x_1+y_1, x_1+2y_1, x_1+3y_1)$, e se $v := (x_2+y_2, x_2+2y_2, x_2+3y_2)$, então

$$\begin{aligned} u + v &= \big((x_1+y_1)+(x_2+y_2), (x_1+2y_1)+(x_2+2y_2), (x_1+3y_1)+(x_2+3y_2)\big) \\ &= \big((x_1+x_2)+(y_1+y_2), (x_1+x_2)+2(y_1+y_2), (x_1+x_2)+3(y_1+y_2)\big) \in W; \end{aligned}$$

  (iii) se $x, y, a \in \mathbb{R}$, e se $u := (x+y, x+2y, x+3y)$, então

$$a\cdot u = \big(a(x+y), a(x+2y), a(x+3y)\big) = \big(ax+ay, ax+2(ay), ax+3(ay)\big) \in W.$$

(b) O conjunto W é um subespaço vetorial de V, pois:

  (i) $0_n \in W$ (já que $0_n \cdot A = 0_n$);

  (ii) se X e Y pertencem a W, então

$$(X+Y)A = \underbrace{XA}_{=0_n} + \underbrace{YA}_{=0_n} = 0_n + 0_n = 0_n,$$

  e, portanto, nesse caso, $X + Y \in W$;

  (iii) se $X \in W$, e se $a \in \mathbb{R}$, então

$$(aX)A = a\underbrace{(XA)}_{=0_n} = a\cdot 0_n = 0_n,$$

  e, portanto, nesse caso, $aX \in W$.

(c) O conjunto W é um subespaço vetorial de V, pois:

  (i) o polinômio nulo pertence a W (já que, se $\mathbf{0}$ é esse polinômio, então $\mathbf{0}(1) = 0$);

  (ii) se $p(t) := a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$ e $q(t) := b_3t^3 + b_2t^2 + b_1t + b_0$ pertencem a W, então, como

$$(p+q)(t) = (a_3+b_3)t^3 + (a_2+b_2)t^2 + (a_1+b_1)t + (a_0+b_0),$$

$$\begin{aligned} (p+q)(1) &= (a_3+b_3) + (a_2+b_2) + (a_1+b_1) + (a_0+b_0) \\ &= (a_3+a_2+a_1+a_0) + (b_3+b_2+b_1+b_0) \\ &= \underbrace{p(1)}_{=0} + \underbrace{q(1)}_{=0} = 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

  e, portanto, nesse caso, $p + q \in W$;

(iii) se $p(t) \coloneqq a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$ pertence a W, e se $a \in \mathbb{R}$, então, como

$$(ap)(t) = (aa_3)t^3 + (aa_2)t^2 + (aa_1)t + aa_0,$$

$$(ap)(1) = aa_3 + aa_2 + aa_1 + aa_0 = a(a_3 + a_2 + a_1 + a_0) = a\underbrace{p(1)}_{=0} = a \cdot 0 = 0,$$

e, portanto, nesse caso, $ap \in W$.

Observação: poderíamos ter economizado alguns passos na demonstração se tivéssemos nos valido diretamente do fato de que, se $p, q \in P_3(\mathbb{R})$, e se $a \in \mathbb{R}$, então $(p+q)(1) = p(1)+q(1)$, e $(ap)(1) = ap(1)$.

(d) O conjunto W não um subespaço vetorial de V, pois embora $(1,0,1)$ e $(-1,0,1)$ pertençam a W (já que $1 = 1^2 - 0^2$, e $1 = (-1)^2 - 0^2$), $(1,0,1)+(-1,0,1)$ não pertence a W (já que $(1,0,1)+(-1,0,1) = (0,0,2)$, e $2 \neq 0^2 - 0^2$).

Exercício 4.

(a) Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, e sejam U e W subespaços de V. Mostre que $U \cap W$ é um subespaço de V. Dê um exemplo para mostrar que a união de dois subespaços de um espaço vetorial V não é necessariamente um subespaço de V.

(b) Seja $V \coloneqq M_2(\mathbb{R})$, e sejam

$$U \coloneqq \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} : x + y + z + t = 0 \right\}$$

e

$$W \coloneqq \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} : x - y + z - t = 0 \right\}.$$

Determine o subespaço $U \cap W$.

Resolução.

(a) **Primeira parte.**

(i) É claro que $0_V \in U \cap W$, pois, como U e W são subespaços de V, $0_V \in U$, e $0_V \in W$.

(ii) Se u e v pertencem a $U \cap W$, então u e v pertencem tanto a U quanto a W. Logo, nesse caso, $u + v$ pertence a U (pois U é um subespaço de V) e a W (pois W é um subespaço de V) e, portanto, pertence também a $U \cap W$.

(iii) Se $u \in U \cap W$, então u pertence a U e a W. Logo, nesse caso, para cada $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot u$ pertence a U (pois U é um subespaço de V), e a W (pois W é um subespaço de V) e, portanto, pertence também a $U \cap W$.

Em vista de (i), de (ii) e de (iii), podemos concluir que $U \cap W$ é, de fato, um subespaço vetorial de V.

Segunda parte.

É fácil ver que $U \coloneqq \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $W \coloneqq \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$. Apesar disso, $U \cup W$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$, pois, embora $(1,0)$ e $(0,1)$ pertençam a $U \cup W$ (pois $(1,0) \in U$, e $(0,1) \in W$), $(1,0) + (0,1) \notin U \cup W$ (pois $(1,0) + (0,1) = (1,1)$, $(1,1) \notin U$, e $(1,1) \notin W$).

(b) Seja $A \coloneqq \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ em $M_2(\mathbb{R})$. Resulta das definições de U e de W que $A \in U \cap W$ se, e somente se, (a, b, c, d) é uma solução do sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z + t &= 0 \\ x - y + z - t &= 0 \end{cases}.$$

Sendo assim, como

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 0 \\ x-y+z-t & = & 0 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 0 \\ -2y-2t & = & 0 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 0 \\ y=-t & = & 0 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & -t \end{array}\right. ,$$

podemos concluir que $A \in U \cap W$ se, e somente se, $a=-c$, e $b=-d$. Logo,

$$U \cap W = \left\{ \begin{bmatrix} -z & -t \\ z & t \end{bmatrix} : z, t \in \mathbb{R} \right\}.$$