Física IV (IF 2023)
Aula 17

- Objetivos de aprendizagem:
  - Escrever as 4 equações de Maxwell para um meio dielétrico
  - Obter as equações de Maxwell para um meio dielétrico na ausência de cargas e correntes livres
  - Obter a equação de onda e obter soluções de ondas eletromagnéticas planas se propagando em uma dada direção da forma mais geral possível
  - Reconhecer a relação entre a constante dielétrica e o índice de refração de um meio
  - Revisar a relação entre B e E da O.E.M. em um meio dielétrico

Eqs. Maxwell num meio dielétrico

- Precedem historicamente as equações de Maxwell “no vácuo”
- Envolvem os campos médios “macroscópicos” (ignoram os microscópicos, na escala atômica)
- Leva em conta a carga e a corrente de polarização, separadamente da carga e da corrente “livres”
- Basta acrescentar: $\rho_{pol}=-\vec{\nabla}.\vec{P}$ e $\vec{J}_{pol}=\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$
- Costuma-se enfatizar as “livres” na notação (nem sempre): $\rho_l,\ \vec{J}_l$

Equações de Maxwell em dielétrico

Incluindo $\rho_{pol} = -\vec{\nabla}.\vec{P}$ e $\vec{J}_{pol} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$

(obs.: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$)
(="deslocamento" elétrico)

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho_l + \rho_{pol}}{\varepsilon_0} \longrightarrow \vec{\nabla}.(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_l$$

(Gauss)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_l + \vec{J}_{pol} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \longrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_l + \frac{\partial(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}{\partial t})$$

(Ampére-Maxwell)

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

Equações de Maxwell livre de cargas e correntes livres

$$\begin{cases} \rho_l = 0 \\ \vec{J}_l = 0 \end{cases}$$

$$\rho_{pol} = -\vec{\nabla} . \vec{P} \quad \text{e} \quad \vec{J}_{pol} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$$\left(\text{obs.: } \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right)$$

$$\vec{\nabla} . \vec{E} = \frac{0 + \rho_{pol}}{\varepsilon_0} \longrightarrow$$

(Gauss)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(0 + \vec{J}_{pol} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \longrightarrow$$

(Ampére-Maxwell)

$$\vec{\nabla} . \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right)}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} . \vec{B} = 0$$

Eqs. Maxwell no dielétrico “livre de livres”

$$\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E} \qquad (\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})=(1+\chi)\varepsilon_0\vec{E}=\kappa\varepsilon_0\vec{E}=\varepsilon\vec{E}$$

$$\vec{\nabla}.(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\frac{\partial(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B}=0$$

$$\Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}.(\kappa\varepsilon_0\vec{E})=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\frac{\partial(\kappa\varepsilon_0\vec{E})}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B}=0$$

(Recordação do slide 3 da aula 2)

Onda E.M. “longe” de cargas e correntes

$$\rho = 0\,, \vec{J} = 0$$

Dependência em uma só dimensão espacial e no tempo

$$\vec{E} = E_x(z,t)\,\hat{i} \;\; [\text{e } \vec{B} = B_y(z,t)\,\hat{j}]$$

Existiriam soluções das 4 eqs. Maxwell com essas características?
→ Substituir nelas.

Obs.: campos E e B são transversais e perpendiculares entre si.

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Outras obs.:
→ E_x exige um B_y não trivial (cte.)
→ B_y exige um E_x não trivial (só)
→ Equação de onda

(Recordação do slide 4 da aula 2)

Equação de onda/onda E.M.

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0$$

ou

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

Sendo:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Equação de onda em 1D

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times 8.854188\ldots \times 10^{-12}}} = 2.99792\ldots \times 10^8 \text{ m/s} = c$$

Campo elétrico de onda plana se propagando na direção do eixo z

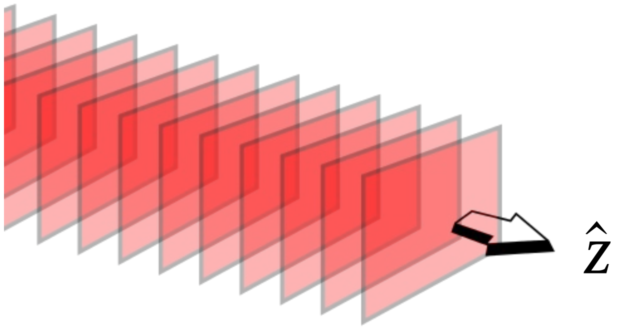
$$\vec{\nabla}.(\kappa\varepsilon_0\vec{E})=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\frac{\partial(\kappa\varepsilon_0\vec{E})}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B}=0$$

$$\vec{E}(z,t)=E_x(z,t)\hat{i}+E_y(z,t)\hat{j}+E_z(z,t)\hat{k}$$



Campos dependem somente de z e t

$$\vec{E}(z,t),\vec{B}(z,t)$$

Meio linear: κ constante

$$\rightarrow E_z(z,t)=E_{z0}=\text{const.}$$

$$\rightarrow\vec{\nabla}\times\vec{E}(z,t)=\frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{j}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\hat{i}$$

Equação de onda e v

- Obter a velocidade de propagação v a partir da equação de onda
- Para obter a equação de onda, aplicar o rotacional do rotacional do campo elétrico e usar outras equações de Maxwell
- Obs.: ordem dos operadores de diferenciação é irrelevante. Ex.: $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}$

Índice de refração

$$n = \frac{c}{v} \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\kappa \varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\kappa}} \qquad \Rightarrow n = \sqrt{\kappa}$$

Relação de Maxwell

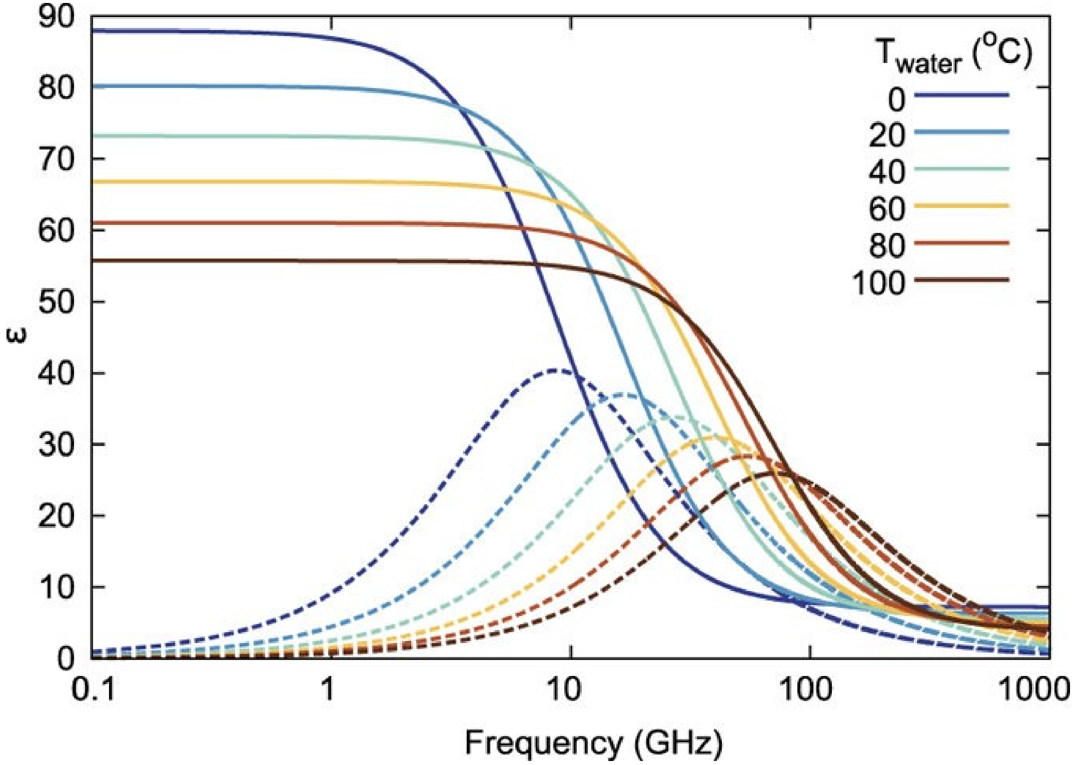
$$\lambda = 300\,\mu\mathrm{m}$$

Substância	$n^2_{300\mu m}$	κ (estático)
K Cl	4,8	4,75
K Br	5,1	4,66
NH4 Cl	6,8	6,85

Substância	n^2 (amarelo)	κ (estático)
Ar	1,000294	1,000295
H_2	1,000138	1,000132
CO	1,000346	1,000345

H_2O (20º C)	1,77	80	$\lambda \approx 580\,\mathrm{nm}$
	80	80	$\lambda \geq 1\,\mathrm{m}$

κ da Água (em função da freq.)



Dielectric permittivity of water as a function of frequency for the temperature 0-100°C.

(solid lines correspond to the real part, dashed lines to the imaginary part)

$$c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

580 nm → 520 THz
1 m → 0.3 GHz
(em vácuo)

$$\kappa(f) = n^2(f) = \left(\frac{c}{v(f)}\right)^2$$

Andrei Andryieuski, Svetlana M. Kuznetsova, Sergei V. Zhukovsky, Yuri S. Kivshar & Andrei V. Lavrinenko
Scientific Reports volume 5, Article number: 13535 (2015)

Densidade de energia eletromagnética e conservação da energia

Slide 2 aula 3
VÁCUO

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

Mostrar que a taxa de variação temporal sendo →

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon_0 \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

→ portanto:

L.A/M
+L.F

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \vec{J}\cdot\vec{E} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S}$$

(conserv. energia)

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

Vetor de Poynting

Energia E.M. no meio dielétrico

- slide 19 aula 11 $\rightarrow u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \kappa |\vec{E}|^2$ (elétrica)

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \kappa |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}|^2$$ (total)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \ldots = -\vec{\nabla}.\vec{S}$$

Obs.: $\vec{E}.(\vec{\nabla}\times\vec{B}) - \vec{B}.(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\vec{\nabla}.(\vec{E}\times\vec{B})$
(identidade matemática)

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})$$

Relação entre B e E na o.e.m.

- slide 6 aula 3 → $\boxed{\vec{B}=\frac{\hat{u}}{c}\times\vec{E}}$ (VÁCUO)

- Dielétrico: $\varepsilon_0 \rightarrow \kappa\varepsilon_0$

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \rightarrow v=\frac{1}{\sqrt{\kappa\mu_0\varepsilon_0}}: \quad \boxed{\vec{B}=\frac{\hat{u}}{v}\times\vec{E}}$$ (Dielétrico)

- … e portanto: → $u_B=u_E$ (densidade de energia elétrica igual à magnética)
- … e:→ $\vec{S}=vu\hat{u}$