Teoria Linear de Ondas de Gravidade

Efeitos da profundidade

Solução do PVC de onda livre

Podemos investigar, desde já, alguns efeitos da profundidade h:

$$\phi(x,z,t) = \frac{gA}{\omega}\frac{coshk(z+h)}{coshkh}\sin(kx-\omega t)$$

e:

$$\zeta(x,t) = Acos(kx-\omega t)$$

e:

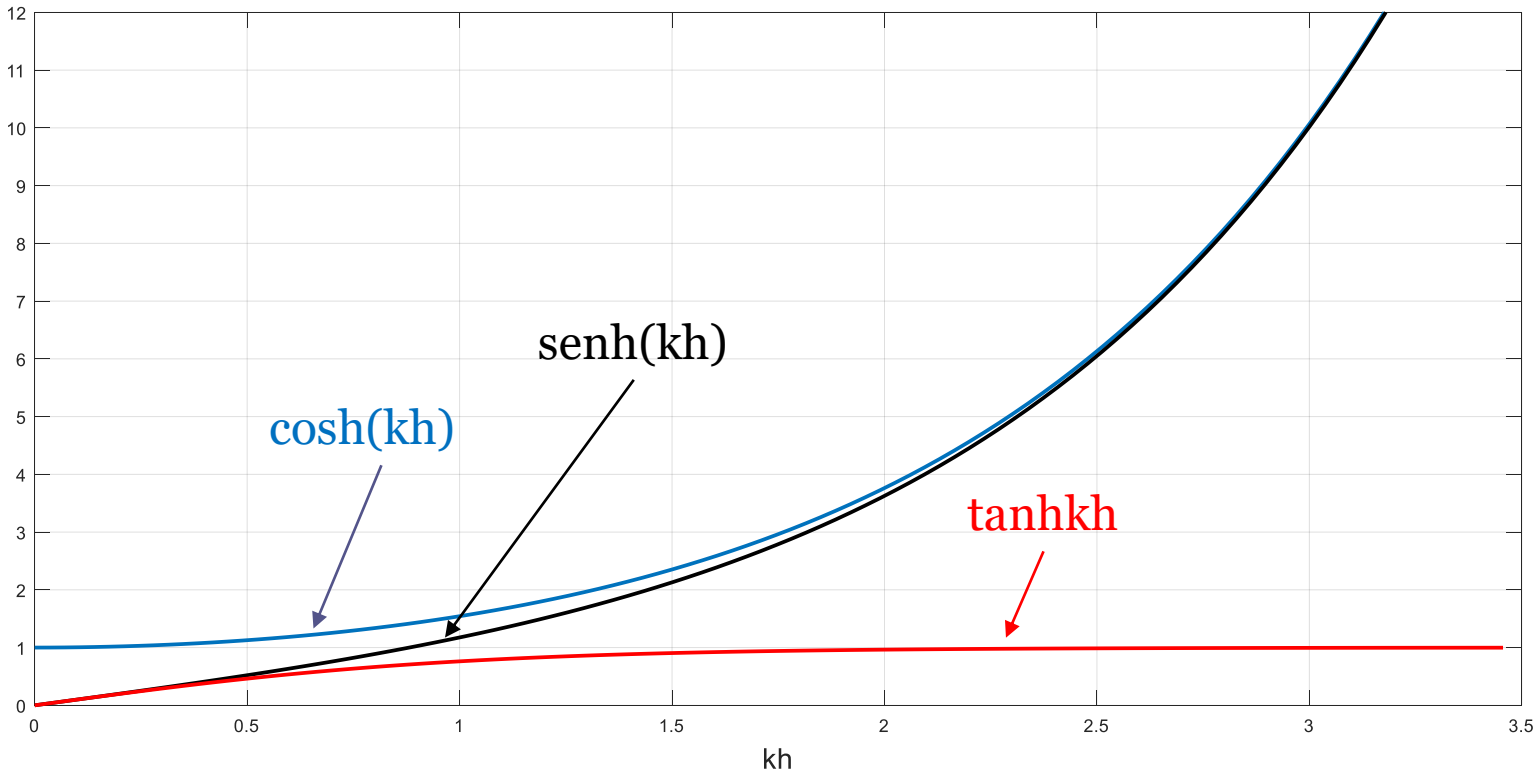
$$k = \frac{\omega^2}{gtanh(kh)}$$

Relação de dispersão da onda linear em profundidade constante h

Solução de onda livre LINEAR (ou de 1ª ordem)

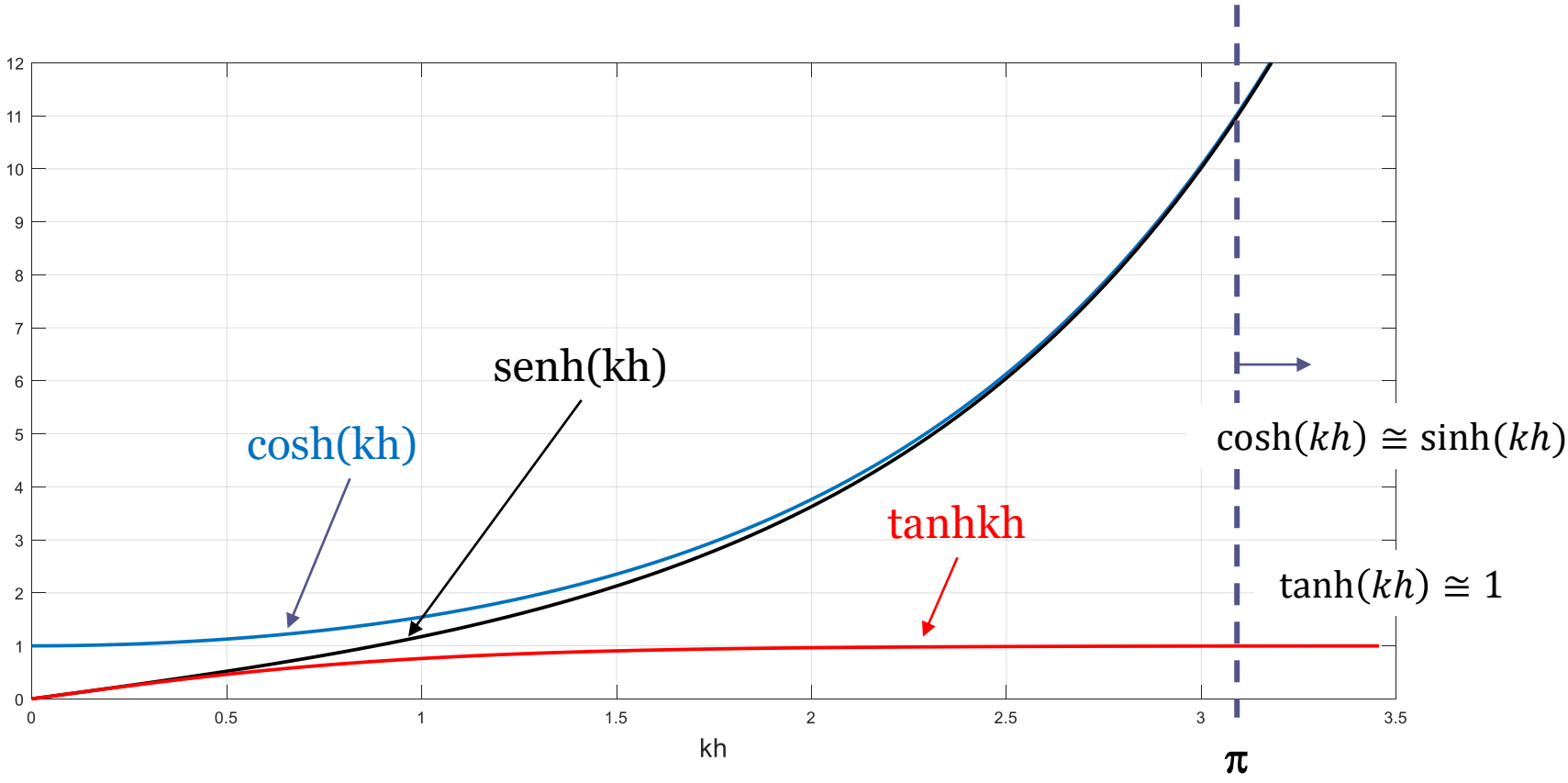
Efeitos da profundidade (h)

Comportamento das funções hiperbólicas:



Efeitos da profundidade (h)

Comportamento das funções hiperbólicas:



Efeitos da profundidade (h)

1) **Limite de águas profundas** ($kh \geq \pi; \boldsymbol{h \geq \lambda/2}$)

Nessa condição, consideramos que:

$$\tanh(kh) \cong 1$$

$$\lim_{kh \to \infty} \frac{coshk(z+h)}{coshkh} = e^{kz}$$

verificar

e, com isso, chegamos em uma formulação mais simples, válida neste limite:

Efeitos da profundidade (h)

1) **Limite de águas profundas** ($kh \geq \pi$; $\boldsymbol{h \geq \lambda/2}$)

$$\varphi(x,z,t) = \frac{gA}{\omega} e^{kz} \sin(kx - \omega t)$$

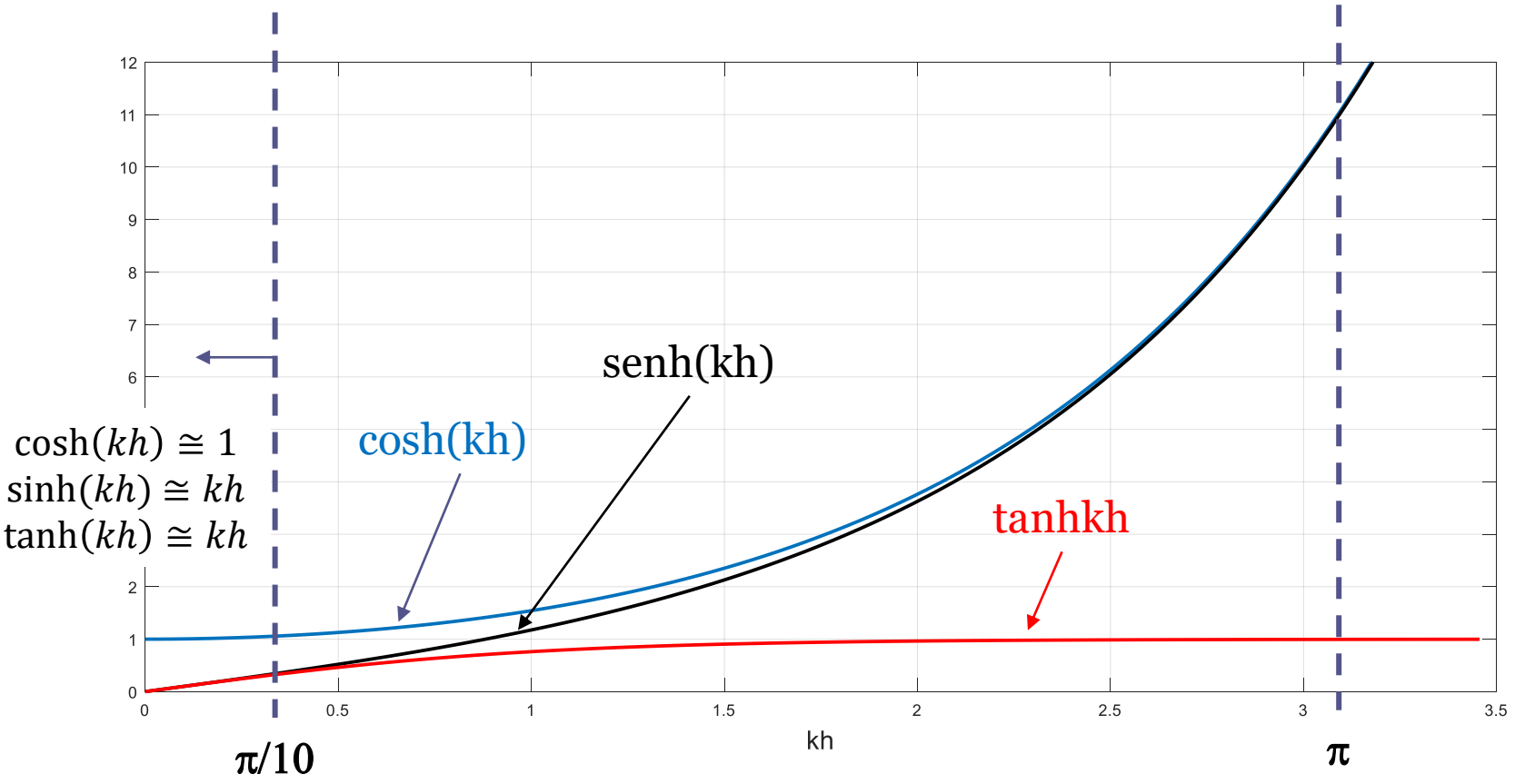
$$\zeta(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$

$$k = \frac{\omega^2}{g}$$

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \frac{g}{\omega} = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/2} = \left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{1/2} = \cdots$$

Efeitos da profundidade (h)

Comportamento das funções hiperbólicas:



A influência da profundidade

2) **Limite de águas rasas** ($kh \leq \pi/10; \boldsymbol{h \leq \lambda/20}$)

Nessa condição, consideramos que: $\tanh(kh) \cong kh$

O que implica em:

$$k = \frac{\omega^2}{g tanh(kh)} \cong \frac{\omega^2}{kgh}$$

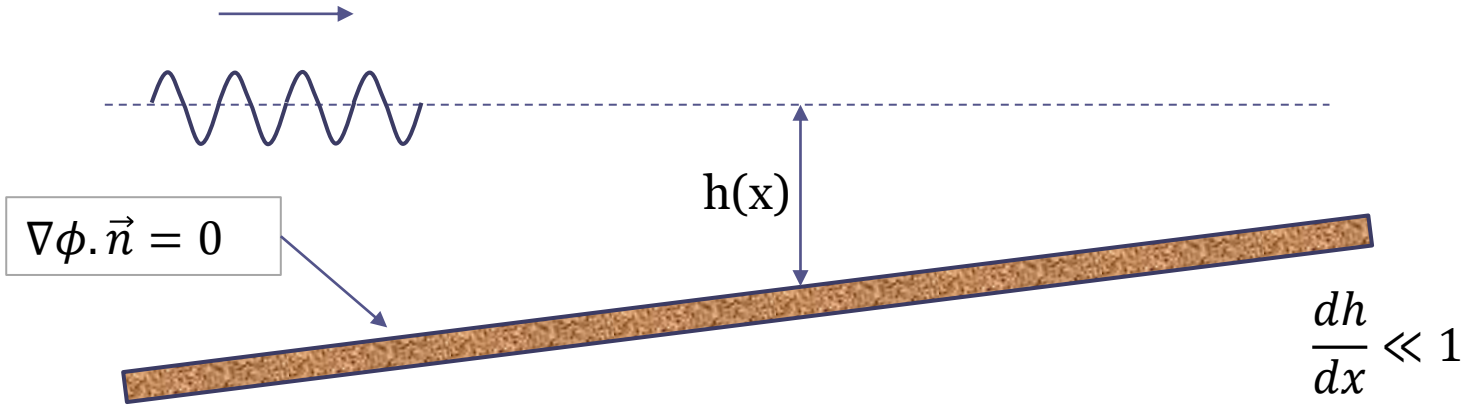
$$\frac{\omega}{k} = c = \sqrt{gh}$$

→ Onda perde o caráter dispersivo

→ *velocidade crítica de propagação*

Wave *shoalling*

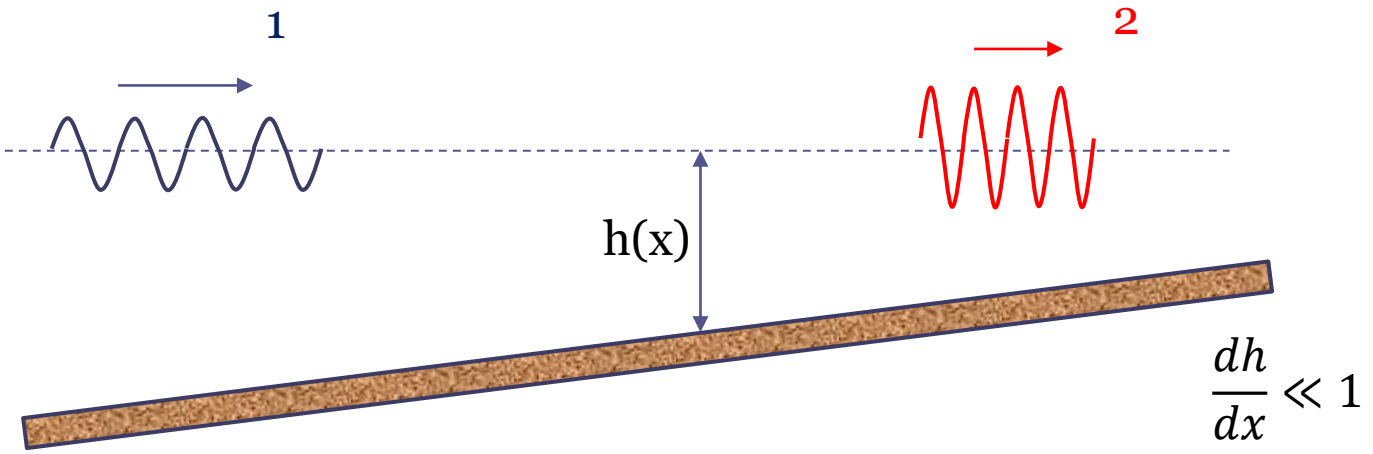
É importante saber que, no caso de um problema envolvendo variação espacial lenta da profundidade ($h=h(x,y)$), como por exemplo:



as propriedades da onda que se mantem invariantes são as temporais (T, ω), enquanto as demais irão variar com a mudança de profundidade: λ=λ(h(x)), A=A(h(x)), c=c(h(x)), etc.

Wave *shoalling*

Verifique que, conforme a onda se aproxima da praia, ela encurta e desacelera:

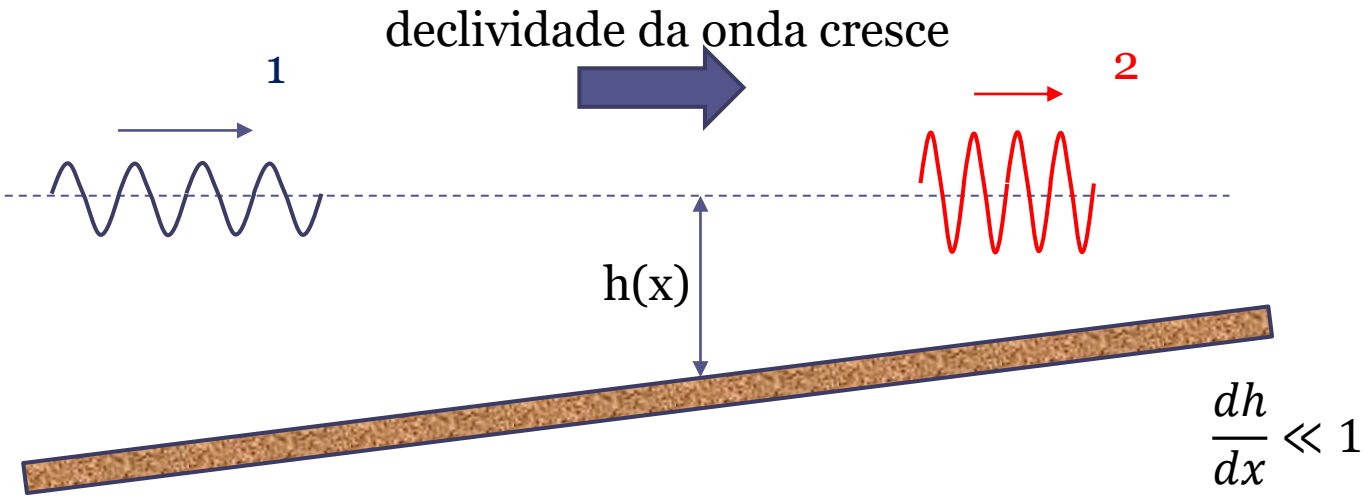


$$\lambda_2 < \lambda_1$$

$$c_2 < c_1$$

Conservação de energia: $A_2 > A_1$

Wave *shoalling*



$$\lambda_2 < \lambda_1$$

$$c_2 < c_1$$

Conservação de energia: $A_2 > A_1$

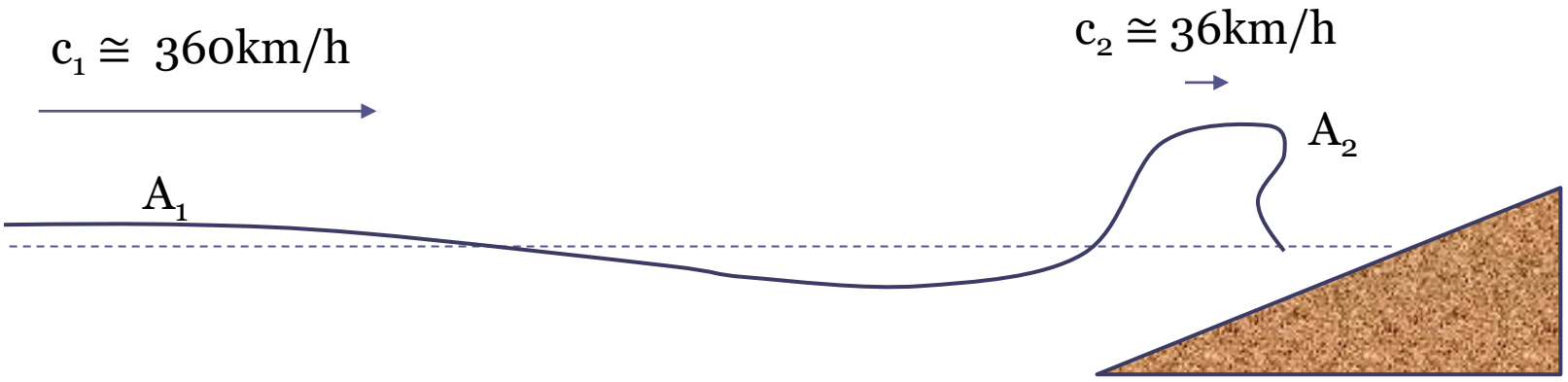
Exercício (em aula):

Estime a velocidade de propagação de um *tsunami* (em km/h) quando a onda está em uma região do oceano com h=1000m e ao atingir a costa, quando h=10m.

Considere g =10 m/s^2

Exercício (em aula):

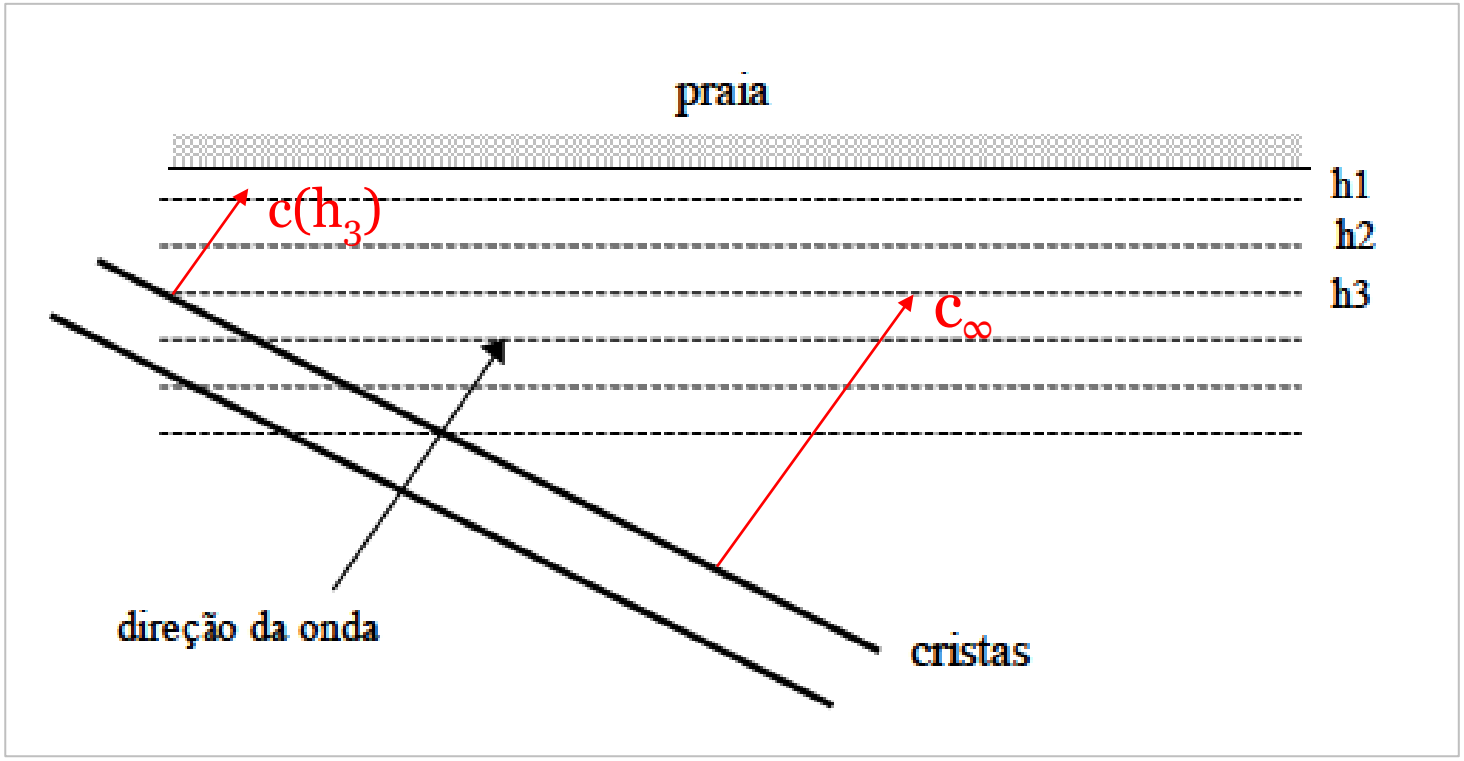
Estime a velocidade de propagação de um tsunami (em km/h) quando a onda está em uma região do oceano com h=1000m e ao atingir a costa, quando h=10m



$$A_2 >> A_1$$

Refração de Ondas

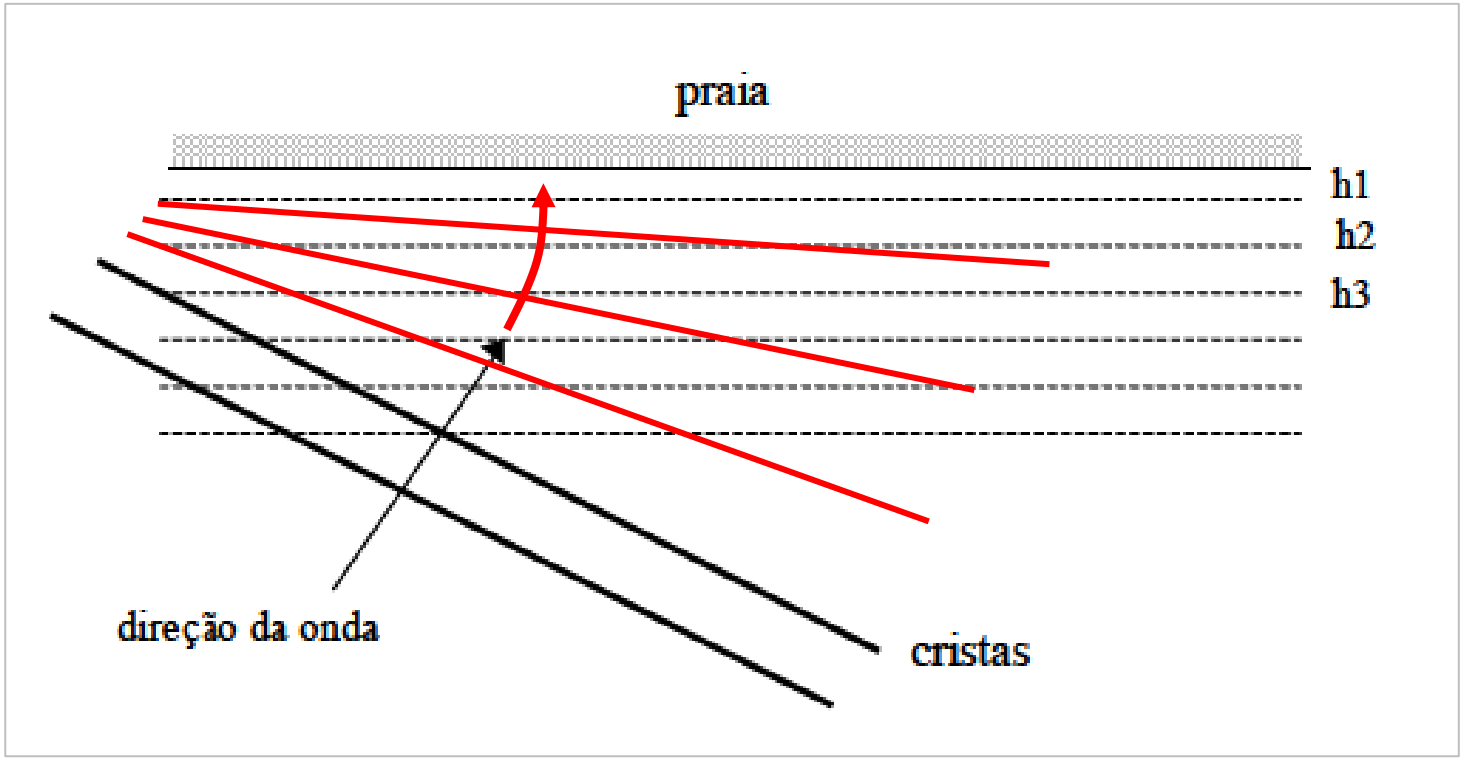
A variação da celeridade com a profundidade também implica no fenômeno de *refração de ondas*, induzido pelo leito marinho:



Refração de Ondas

Sugestão de vídeo na web:
https://www.youtube.com/watch?reload=9&v=G1FIBuybN78

A variação da celeridade com a profundidade também implica no fenômeno de *refração de ondas*, induzido pelo leito marinho:



Exercício (p/ próxima aula)

Determine qual a amplitude de pressão oscilatória induzida por uma onda de amplitude A=1m e período T=10s em um ponto da superfície do fundo do mar ($z = -h$) quando:

a) h=10m

b) h=100m

(considerar ρ=1000kg/m^3 e g=10m/s^2)

R. (a) 8.1 kPa (b) 0.4 kPa