MAT0122 - Álgebra Linear I
Lista 4
2023

1. Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial e sejam U e W subespaços de V. Dizemos que V é **soma direta** de U e W e denotamos por $U \oplus W$, se

   (a) $V = U + W$,

   (b) $U \cap W = \{0\}$.

   Mostre que $V = U \oplus W$ se, e somente se, todo vetor $v \in V$ se escreve **de modo único** como $v = u + w$, onde $u \in U$ e $w \in W$.

2. Seja $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dizemos que $f \in V$ é uma função **par** se $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e que $f \in V$ é uma função **ímpar** se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sejam $U = \{f \in V \mid f \text{ é par }\}$ e $W = \{f \in V \mid f \text{ é ímpar }\}$. Mostre que:

   (a) U e W são subespaços de V;

   (b) $V = U \oplus W$.

3. Sejam W_1, W_2 e W_3 subespaços de um espaço vetorial V.

   (a) **Verdadeiro ou Falso?** $W_1 \cap (W_2 + W_3) = W_1 \cap W_2 + W_1 \cap W_3$;

   (b) Mostre que $W_1 \cap (W_2 + W_1 \cap W_3) = W_1 \cap W_2 + W_1 \cap W_3$.

4. Determine um conjunto gerador para cada um dos subespaços W do espaço vetorial V.

   (a) $V = \mathbb{R}^4$; $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y, z, t \text{ formam uma PA}\}$.

   (b) $V = \mathbb{R}^4$; $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y, z, t \text{ formam uma PG de razão fixa } q\}$.

   (c) $V = M_3(\mathbb{R})$; $W = \{A \in V \mid A \text{ é simétrica}\}$.

   (d) $V = P_3(\mathbb{R})$; $W = \{p(t) \in V \mid p(1) = p'(1) = 0\}$.

   (e) $V = \mathbb{R}^4$; $W = \{(x, y, z, t) \mid 2x + y + z = 0 \text{ e } y + z - t = 0\}$.

5. Verifique se os vetores $u = (1, 1, 2, 3)$ e $w = (5, -1, -1, -4)$ estão ou não so subespaço U de $\mathbb{R}^4$, onde
$$U = [(1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1)].$$

6. Mostre que os conjuntos $\{\operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t, \operatorname{sen} t \cos t\}$ e $\{1, \operatorname{sen} 2t, \cos 2t\}$ geram o mesmo subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

7. Mostre que o vetor $v = (1, 2, 2)$ não é combinação linear de $u = (1, 1, 2)$ e $w = (1, 2, 1)$. A partir daí, formule um sistema linear de 3 equações e 3 incógnitas que não tem solução e que tem o vetor v no segundo membro.

8. Sejam v_1, v_2 e v_3 os vetores-linha e w_1, w_2 e w_3 os vetores- coluna da matriz
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

   Mostre que $[v_1, v_2, v_3] = [w_1, w_2, w_3]$.

9. Dê um exemplo de uma matriz 3×3 tal que o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores-linha da matriz é diferente do subespaço gerado pelos vetores-coluna.

10. Seja V um espaço vetorial e seja W um subespaço de V. Um **suplementar** de W é um subespaço U de V tal que $W \oplus U = V$. Determine um suplementar do subespaço $W \subset \mathbb{R}^n$ para

    (a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$;

    (b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ e } x + 3y - z = 0\}$;

    (c) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$;

    (d) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ e } x + 2t = z + 2y\}$.

11. Seja $(V, +, \dot{})$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e sejam S e T subconjuntos de V.
    VERDADEIRO OU FALSO?

    (a) $[S \cup T] = [S] + [T]$.

    (b) $[S \cap T] = [S] \cap [T]$.

12. Sejam U, W_1, e W_2 subespaços de um espaço vetorial V tais que $U \oplus W_1 = U \oplus W_2$. É verdade que $W_1 = W_2$?

13. Sejam U_1, U_2, W_1, e W_2 subespaços de um espaço vetorial V tais que $U_1 \oplus W_1 = U_2 \oplus W_2$. Mostre que se $U_1 \subset W_1$ e $U_2 \subset W_2$ então $U_1 = U_2$ e $W_1 = W_2$.

14. Seja V um espaço vetorial e sejam X, Y e Z subespaços de V para os quais vale o seguinte:

$$X \cap (Y + Z) = Y \cap Z = \{0\}.$$

    Mostre que se $u + v + w = 0$, com $u \in X$, $v \in Y$ e $w \in Z$, então $u = v = w = 0$.

15. Verifique se os seguintes subconjuntos do espaço vetorial V são LI ou LD.

    (a) $V = \mathbb{R}^3$; $S = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 3)\}$.

    (b) $V = M_2(\mathbb{R})$; $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

    (c) $V = P_3(\mathbb{R})$; $S = \{t^3 - 1, t^3 + 2t + 1, t^2 - 1, t^3 + t^2 + t + 1\}$.

16. Mostre que o subconjunto $S = \{(1, 0, \alpha), (1, 1, \alpha), (1, 1, \alpha^2)\} \subset \mathbb{R}^3$ é LI se, e somente se, $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$.

17. Ache uma solução não trivial do sistema linear

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

    e a partir daí, obtenha uma combinação linear nula dos vetores $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (2, 1, -2), v_3 = (3, 1, 1)$ e $v_4 = (4, -1, -2)$, na qual os coeficientes não são todos nulos.

18. Sejam V um espaço vetorial e $u, v, w \in V$. Mostre que $\{u, v, w\}$ é LI , se e somente se, $\{u + v, u + w, v + w\}$ é LI.

19. Suponha que $\{u_1, u_2, \cdots u_r, v_1, v_2, \cdots v_s\}$ é um subconjunto LI de um espaço vetorial V. Mostre que $[u_1, u_2, \cdots, u_r] \cap [v_1, v_2, \cdots v_s] = \{0\}$.

20. Se $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ é um conjunto LI de um espaço vetorial V, mostre que

$$T = \{v_1, v_2 - v_1, \cdots, v_m - v_1\}$$

também é LI. Vale a recíproca?

21. Assinale V (**verdadeiro**) ou F (**falso**) quanto à validade da afirmação: "A união de dois subconjuntos LI de um espaço vetorial V é um subconjunto LI de V."

    (a) ( ) Sempre.
    (b) ( ) Nunca.
    (c) ( ) Quando um deles é disjunto do outro.
    (d) ( ) Quando um deles está contido no outro.
    (e) ( ) Quando um deles é disjunto do subespaço gerado pelo outro.
    (f) ( ) Quando o número de elementos de um deles somado ao número de elementos do outro é igual à dimensão de V.

22. Prove que $\{1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}\}$ é um subconjunto LI do espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Mostre que $S = \{e^{cx} \mid c \in \mathbb{R}\}$ é LI.

23. Mostre que:

    (a) $[\operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t] = [1, \cos 2t]$;
    (b) $[\operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t, \operatorname{sen} t \cos t] = [1, \operatorname{sen} 2t, \cos 2t]$.

24. Seja V espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $u, v, w \in V$. Mostre que:

    (a) $\{u, v\}$ é LI se, e somente se, $\{u + v, u - v\}$ é LI;
    (b) $\{u, v, w\}$ é LI se, e somente, $\{u + v, u + w, v + w\}$ é LI.

25. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. É verdade que $\{u, v, w\}$ é LI se, e somente se, os três subconjuntos $\{u, v\}$,$\{u, w\}$ e $\{v, w\}$ são LI?

26. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (-1, 0, 1, 2), v_2 = (3, 4, -2, 5)$ e $v_3 = (1, 4, 0, 9)$. Determine um sistema linear homogêneo tal que W é exatamente o conjunto solução desse sistema.

27. Seja V um espaço vetorial gerado por um conjunto G que tem m vetores. As afirmações a seguir são **verdadeiras** ou **falsas**?

    (a) Nenhum subconjunto de V com menos do que m vetores gera V.
    (b) Todo subconjunto de V com mais do que m vetores é LD.
    (c) Se $\dim V = m$ então G é LI.