MAT6682 - Tópicos de Análise Funcional - 2023
Lista 4

1. Metrizabilidade das Topologias Fraca e Fraca*. Teoremas de Krein-Smulian e Eberlein-Smulian

1. Dizemos que um espaço normado X é *compactamente gerado* (respectivamente, *fracamente compactamente gerado*) se existe um subconjunto compacto (respectivamente, w-compacto) K de X tal que $X = \overline{\text{span}}(K)$.

a) Mostre que X é compactamente gerado se, e somente se, X é separável.

b) Mostre que se X é separável ou reflexivo, então X é fracamente compactamente gerado.

c) Dê um exemplo de um espaço de Banach fracamente compactamente gerado que não é separável nem reflexivo.

2. Sejam X um espaço normado e K um subconjunto w-compacto de X^*.

a) Mostre que as topologias fraca e fraca* induzidas em K coincidem.

b) Mostre que se X é separável, então a topologia fraca induzida em K é metrizável. Conclua que K munido desta topologia é um espaço topológico separável.

3. Mostre que ℓ_∞ não é fracamente compactamente gerado.

4. Seja X um espaço de Banach separável (real). O objetivo deste exercício é mostrar que X é linearmente isométrico a um subespaço de $C[0,1]$.

a) Mostre que existe um espaço métrico compacto K tal que X é linearmente isométrico a um subespaço de $C(K)$.

b) Seja K como no item anterior e seja Δ o conjunto de Cantor. Mostre que $C(K)$ é linearmente isométrico a um subespaço de $C(\Delta)$. (*Sugestão:* considere uma função $F : \Delta \to K$ contínua e sobrejetora. Veja M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler, *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, Spinger, 2011, Teorema 17.11, pg. 740.)

c) Mostre que $C(\Delta)$ é linearmente isométrico a um subespaço de $C[0,1]$ e conclua.

5. Sejam X um espaço normado incompleto, $x^{**} \in \overline{J_X(X)} \setminus J_X(X)$ e $Y = \text{Ker}(x^{**})$. Mostre que Y é um subespaço fechado de X^* tal que $Y \cap rB_{X^*}$ é w^*-fechado para todo $r > 0$, mas Y não é w^*-fechado.

6. Sejam X um espaço de Banach, Y um subespaço de X^*, A um subconjunto convexo de X^* e $\varphi : X^* \to \mathbb{K}$ um funcional linear.

a) Mostre que Y é w^*-fechado se, e somente se, $Y \cap B_{X^*}$ é w^*-fechado.

b) Mostre que φ é w^*-contínuo se, e somente se, a restrição de φ a B_{X^*} é w^*-contínua.

Suponha, agora, que X seja separável.

c) Mostre que A é w^*-fechado se, e somente se, A é w^*-sequencialmente fechado, isto é, se para toda sequência $(x_n^*)_{n\geq 1}$ em A tal que $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$, tem-se $x^* \in A$.

d) Mostre que φ é w^*-contínuo se, e somente se, φ é w^*-sequencialmente contínuo, isto é, se para toda sequência $(x_n^*)_{n\geq 1}$ em X^* tal que $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$, tem-se $\varphi(x_n^*) \longrightarrow \varphi(x^*)$.

7. Sejam X um espaço normado, Y um espaço de Banach e $T : Y^* \to X^*$ um operador linear. Mostre que T é w^*-w^*-contínuo se, e somente se, a restrição de T a B_{Y^*} é w^*-w^*-contínua. (*Sugestão:* use o Exercício 6.b para provar que $J_X(x) \circ T$ é w^*-contínuo para todo $x \in X$.)

8. Considere o subconjunto $A = \{e_m + me_n : n > m \geq 1\}$ de ℓ_2. Mostre que $0 \in \overline{A}^w$, mas nenhuma sequência em A converge fracamente para 0.

9. Sejam X e Y espaços normados, $T : X \to Y$ um operador linear contínuo, $\pi : X \to X/\mathrm{Ker}(T)$ a aplicação quociente e $S : X/\mathrm{Ker}(T) \to Y$ dado por $S(\pi(x)) = T(x)$. Prove as seguintes afirmações:

a) $T(X) = S(X/\mathrm{Ker}(T))$.

b) π^* é uma isometria e um w^*-w^*-homeomorfismo de $(X/\mathrm{Ker}(T))^*$ sobre $(\mathrm{Ker}(T))^\perp$.

c) $T^*(Y^*)$ é fechada se, e somente se, $S^*(Y^*)$ é fechada.

d) $T^*(Y^*)$ é w^*-fechada se, e somente se, $S^*(Y^*)$ é w^*-fechada.

10. **(Teorema da Imagem Fechada)** Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear contínuo. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

a) $T(X)$ é fechada.

b) $T^*(Y^*)$ é fechada.

c) $T^*(Y^*)$ é w^*-fechada.

(*Sugestão:* o exercício anterior assegura que podemos supor, sem perda de generalidade, que T seja injetor. Use o Teorema de Krein-Smulian e o Exercício 8 da Lista 3.)

11. Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear contínuo. Use o Teorema da Imagem Fechada para provar as seguintes afirmações:

a) T é sobrejetor se, e somente se, T^* é isomorfismo de Y^* sobre um subespaço de X^*.

b) T^* é sobrejetor se, e somente se, T é isomorfismo de X sobre um subespaço de Y.

(*Sugestão:* use o Exercício 8 da Lista 3.)

12. Seja $X = \{(x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : (nx_n)_n \in c_0\}$ munido da norma $\|\cdot\|_\infty$ e considere os operadores lineares contínuos $T : X \to c_0$ e $S : c_0 \to X$ dados por $T((x_n)_n) = (x_n)_n$ e $S((y_n)_n) = \left(\frac{y_n}{n}\right)_n$.

a) Mostre que $T^*(c_0^*)$ é w^*-fechada, mas $T(X)$ não é fechada.

b) Mostre que $S(c_0)$ é fechada, mas $S^*(X^*)$ não é fechada.

13. Seja X um espaço normado. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

a) X é reflexivo.

b) Todo subespaço fechado e separável de X é reflexivo.

c) Toda sequência limitada em X admite subsequência w-convergente.

14. Seja X um espaço reflexivo.

a) Mostre que X é fracamente sequencialmente completo.

b) Mostre que X tem a propriedade de Schur se, e somente se, X tem dimensão finita.

15. Sejam X um espaço reflexivo, A um subconjunto fechado, convexo e não vazio de X e $x_0 \in X \setminus A$. Mostre que existe $a \in A$ tal que $d(x_0, A) = d(x_0, a)$.