Universidade de São Paulo
ICMC - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Professora: Regilene Delazari dos Santos Oliveira
Alunos:

Álgebra Linear - SMA0304
Atividade Bônus 4

11/09/2023

Questão 1. Verifique se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa, justificando cada passagem.

a) O espaço $\mathbb{R}^5$ tem uma única base, a saber

$$\{(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}.$$

Solução: Falso. Esse é apenas um exemplo de base. Qualquer conjunto de cinco vetores L.I. é uma base para o $\mathbb{R}^5$.

b) As matrizes em

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

formam um base para M_2, que é o conjunto das matrizes 2×2 com entradas reais.

Solução: Precisamos verificar que o conjunto B gera M_2 e é L.I. Verifiquemos primeiramente que gera, isto é, que qualquer

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

pertencente a M_2 se escreve como combinação dos elementos de B. Veja que

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Logo, B gera M_2. Agora, sejam $\alpha,\beta,\gamma,\tau\in\mathbb{R}$ tais que

$$\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=0,$$

então

$$\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\tau\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

daí $\alpha=\beta=\gamma=\tau=0$, o que nos mostra que o conjunto é L.I.

c) O espaço vetorial

$$U=\{A\in M_2;\operatorname{tr}(A)=0\},$$

é finitamente gerado, com $\dim U=3$.

Solução: Lembre-se que o traço de uma matriz quadrada é a soma das entradas da diagonal principal. Assim, o conjunto U pode ser descrito do seguinte modo:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in M_2 : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Considere agora o conjunto

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in U$, então

$$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Isso mostra que B é um conjunto finito e gerador para U. Para concluir sobre a dimensão, precisamos mostrar que U é L.I. e então será uma base. Note então que:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se, e somente se, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ e concluímos o desejado.

$\blacksquare$

Questão 2. No espaço $\mathbb{R}^3$, considere os seguintes subespaços:

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0\} \\ V &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 2z\} \\ X &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x = 2y = z\} \\ W &= [(1, 1, 0), (0, 0, 2)]. \end{aligned}$$

Determine uma base e a dimensão para cada um dos seguintes subespaços e descreva-os geometricamente:

a) U, V, X, W.

Solução:

- $v \in U$ é da forma:

$$v = (0, y, z) = y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Portanto, $U = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)]$ e como são L.I., também formam uma base. Logo, dim $U = 2$. Assim, U é um *plano*.

- $v \in V$ é da forma:

$$v = (x, y, y/2) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 1/2)$$

Portanto, $V = [(1, 0, 0), (0, 1, 1/2)]$ e como são L.I., também formam uma base. Logo, dim $V = 2$. Assim, U é um *plano*.

- $v \in X$ é da forma:
$$v = (x, x, 2x) = x(1, 1, 2)$$
Temos que $\dim X = 1$. Portanto, X é a *reta* que passa pela origem e tem como vetor diretor $(1, 1, 2)$. .
- Os vetores geradores de W são L.I. e, portanto, formam uma base. Assim, W tem dimensão 2 e então é um *plano*.

b) $V \cap W, X \cap W$.

Solução: Para um vetor $v \in V \cap W$ devem existir $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{aligned} v = (x, y, y/2) &= \alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 0, 2) \\ &= (\alpha, \alpha, 2\beta) \end{aligned}$$

Escrevendo as variáveis em termos de x, temos que $x = \alpha = y$ e então $v = (x, x, x/2)$. Reciprocamente, qualquer vetor dessa forma está na interseção $V \cap W$. Concluímos que $V \cap W$ é a *reta* $[(1, 1, 1/2)]$, logo tem dimensão 1.
Note que $(1, 1, 2) = (1, 1, 0) + (0, 0, 2)$ e, portanto, o vetor diretor da reta X está contida no plano W. Assim, $X \cap W = X$, logo, tem dimensão 1.

c) $V + W + U$ e $X + W$.

Solução: A união dos geradores de V, W e de U forma um conjunto de geradores para a soma $V + W + U$. Analisando tais conjuntos, temos que a base canônica

$$B = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

está contida na soma e então $V + W + U = \mathbb{R}^3$, portanto, tem dimensão 3. Finalmente, como $X \cap W = X$, vale que $X + W = W$, logo, $X + W$ tem dimensão 2.

$\blacksquare$