Primeira prova de Álgebra Linear I (tipo A)

Denis de Assis Pinto Garcia

18 de setembro de 2023

Exercício 1.

Para que valores de a e de b o sistema linear

$$\begin{cases} x+y+z &= b \\ x+ay+3z &= 2 \\ ax+y+2z &= 3 \end{cases}:$$

(a) possui uma única solução;

(b) possui infinitas soluções;

(c) não possui soluções.

Resolução.

Como

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & a & 3 & 2 \\ a & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2' := L_2 - L_1 \\ L_3' := L_3 - aL_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & a-1 & 2 & 2-b \\ 0 & 1-a & 2-a & 3-ab \end{array}\right] \underset{L_3'' := L_3' + L_2'}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & a-1 & 2 & 2-b \\ 0 & 0 & 4-a & 5-b-ab \end{array}\right],$$

o sistema do enunciado é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x+y+z &= b \\ (a-1)y+2z &= 2-b \\ (4-a)z &= 5-b-ab \end{cases}. \tag{$*$}$$

Por conta disso, dividiremos nossa análise em dois casos.

Primeiro caso: $a = 4$.

Se $a = 4$, o sistema ($*$) é equivalente a

$$\begin{cases} x+y+z &= b \\ 3y+2z &= 2-b \\ 0 &= 5-5b \end{cases},$$

o qual não possui soluções se $b \neq 1$ (pois $b \neq 1 \Rightarrow 5 - 5b \neq 0$) e possui infinitas soluções se $b = 1$ — já que, nesse caso,

$$\begin{cases} x+y+z &= b \\ 3y+2z &= 2-b \\ 0 &= 5-5b \end{cases} \sim \begin{cases} x &= 1-y-z \\ 3y &= 1-2z \end{cases} \sim \begin{cases} x &= \frac{2-z}{3} \\ y &= \frac{1-2z}{3} \end{cases}.$$

Segundo caso: $a \neq 4$.

Se $a \neq 4$,

$$\begin{cases} x+y+z &= b \\ (a-1)y+2z &= 2-b \\ (4-a)z &= 5-b-ab \end{cases} \sim \begin{cases} x+y &= b-z \\ (a-1)y &= 2-b-2z \\ z &= \frac{5-b-ab}{4-a} \end{cases} \sim \begin{cases} x+y &= \frac{5b-5}{4-a} \\ (a-1)y &= \frac{3ab-2b-2a-2}{4-a} \\ z &= \frac{5-b-ab}{4-a} \end{cases},$$

e é fácil ver que, nessa situação, o sistema

$$\begin{cases} x+y &= \frac{5b-5}{4-a} \\ (a-1)y &= \frac{3ab-2b-2a-2}{4-a} \\ z &= \frac{5-b-ab}{4-a} \end{cases} : \qquad (**)$$

(i) possui uma única solução, se $a \neq 1$ — pois, nesse caso, cada linha da matriz dos coeficientes do sistema $(**)$ possui pivô;

(ii) não possui soluções, se $a = 1$, e se $b \neq 4$ — pois, nesse caso, $a - 1 = 0$, e $3ab - 2b - 2a - 2 = b - 4 \neq 0$;

(iii) possui infinitas soluções, se $a = 1$, e se $b = 4$ — pois, nesse caso, o sistema $(**)$ é equivalente a

$$\begin{cases} x &= 5-y \\ z &= 1 \end{cases}.$$

Por fim, como sistemas lineares equivalentes possuem as mesmas soluções, podemos concluir, em vista da nossa análise, que o sistema do enunciado:

- possui uma única solução, se a é diferente de 4 e de 1;
- possui infinitas soluções, se $a = 4$, e $b = 1$, ou se $a = 1$, e $b = 4$;
- não possui soluções, se $a = 4$, e $b \neq 1$, ou se $a = 1$, e $b \neq 4$.

Exercício 2.

As afirmações a seguir são **VERDADEIRAS** ou **FALSAS**? Justifique! Prove as verdadeiras e, quando a afirmação for falsa, exiba um contraexemplo.

(a) Todo sistema linear homogêneo com mais incógnitas do que equações sempre tem solução não trivial.

(b) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, então $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

(c) Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$. Se B tem uma coluna de zeros, então AB tem uma coluna de zeros.

Resolução.

(a) A afirmação é verdadeira. Para constatar isso, notemos, inicialmente, que, quando escalonamos um tal sistema e eliminamos possíveis equações reduntantes, obtemos um sistema equivalente ao inicial e que também possui mais incógnitas do que equações (pois o número de incógnitas não muda, e o número de equações pode diminuir). Como esse sistema possui mais incógnitas do que equações, ele possui variáveis livres e, portanto, tem infinitas soluções. E, como dois sistemas lineares equivalentes possuem as mesmas soluções, disso concluímos que o sistema inicial também possui infinitas soluções.

(b) A afirmação é falsa, pois, se $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, e se $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, então

$$A^2 - B^2 = A \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (A - B)(A + B).$$

Observação: para perceber que a afirmação é falsa, basta notar que, se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, então, como

$$(A-B)(A+B) = (A-B)A + (A-B)B = AA - BA + AB - BB = A^2 + AB - BA - B^2,$$

$(A-B)(A+B)$ será igual a $A^2 - B^2$ se, e somente se, AB for igual a BA — o que, por sua vez, não é necessariamente verdade.

(c) A afirmação é verdadeira. Com efeito, se $j \in \{1, \dots, p\}$ é tal que $B_{(j)} = 0_{n\times 1}$, então, como

$$(AB)_{(j)} = AB_{(j)},$$

$(AB)_{(j)} = A \cdot 0_{n\times 1} = 0_{m\times 1}$.

Exercício 3. Determine quais subconjuntos W do espaço vetorial V são subespaços de V.

(a) $V = \mathbb{R}^3$, e $W = \{(x, 2x+y, 3x+y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

(b) $V = M_n(\mathbb{R})$, e $W = \{X \in V : AX = 0_n\}$, em que $A \in V$ é uma matriz fixa.

(c) $V = P_3(\mathbb{R})$, e $W = \{p \in V : p(1) = 1\}$.

(d) $V = \mathbb{R}^3$, e $W = \{(x, y, z) \in V : z = x^2 + y^2\}$.

Resolução.

(a) O conjunto W é um subespaço vetorial de V, pois:

(i) $(0,0,0) \in W$ (já que $(0,0,0) = (0, 2\cdot 0 + 0, 3\cdot 0 + 0)$;

(ii) se $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, se $u \coloneqq (x_1, 2x_1 + y_1, 3x_1 + y_1)$, e se $v \coloneqq (x_2, 2x_2 + y_2, 3x_2 + y_2)$, então

$$\begin{aligned} u + v &= \big(x_1 + x_2, (2x_1 + y_1) + (2x_2 + y_2), (3x_1 + y_1) + (3x_2 + y_2)\big) \\ &= \big(x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), 3(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\big) \in W; \end{aligned}$$

(iii) se $x, y, a \in \mathbb{R}$, e se $u \coloneqq (x, 2x+y, 3x+y)$, então

$$a \cdot u = \big(ax, a(2x+y), a(3x+y)\big) = \big(ax, 2(ax) + ay, 3(ax) + ay\big) \in W.$$

(b) O conjunto W é um subespaço vetorial de V, pois:

(i) $0_n \in W$ (já que $A \cdot 0_n = 0_n$);

(ii) se X e Y pertencem a W, então

$$A(X+Y) = \underbrace{AX}_{=0_n} + \underbrace{AY}_{=0_n} = 0_n + 0_n = 0_n,$$

e, portanto, nesse caso, $X + Y \in W$;

(iii) se $X \in W$, e se $a \in \mathbb{R}$, então

$$A(aX) = a\underbrace{(AX)}_{=0_n} = a \cdot 0_n = 0_n,$$

e, portanto, nesse caso, $aX \in W$.

(c) O conjunto W não é um subespaço vetorial de V, pois o polinômio nulo não pertence a W (já que, se $\mathbf{0}$ é esse polinômio, então $\mathbf{0}(1) = 0 \neq 1$).

(d) O conjunto W não um subespaço vetorial de V, pois embora $(1,0,1)$ e $(-1,0,1)$ pertençam a W (já que $1 = 1^2 + 0^2$, e $1 = (-1)^2 + 0^2$), $(1,0,1) + (-1,0,1)$ não pertence a W (já que $(1,0,1) + (-1,0,1) = (0,0,2)$, e $2 \neq 0^2 + 0^2$).

Exercício 4.

(a) Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, e sejam U e W subespaços de V. Mostre que $U \cap W$ é um subespaço de V. Dê um exemplo para mostrar que a união de dois subespaços de um espaço vetorial V não é necessariamente um subespaço de V.

(b) Seja $V \coloneqq M_2(\mathbb{R})$, e sejam

$$U \coloneqq \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} : x + y + z + t = 0 \right\}$$

e

$$W \coloneqq \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} : x + 2y + z + 2t = 0 \right\}.$$

Determine o subespaço $U \cap W$.

Resolução.

(a) **Primeira parte.**

(i) É claro que $0_V \in U \cap W$, pois, como U e W são subespaços de V, $0_V \in U$, e $0_V \in W$.

(ii) Se u e v pertencem a $U \cap W$, então u e v pertencem tanto a U quanto a W. Logo, nesse caso, $u + v$ pertence a U (pois U é um subespaço de V) e a W (pois W é um subespaço de V) e, portanto, pertence também a $U \cap W$.

(iii) Se $u \in U \cap W$, então u pertence a U e a W. Logo, nesse caso, para cada $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot u$ pertence a U (pois U é um subespaço de V), e a W (pois W é um subespaço de V) e, portanto, pertence também a $U \cap W$.

Em vista de (i), de (ii) e de (iii), podemos concluir que $U \cap W$ é, de fato, um subespaço vetorial de V.

Segunda parte.

É fácil ver que $U \coloneqq \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $W \coloneqq \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$. Apesar disso, $U \cup W$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$, pois, embora $(1, 0)$ e $(0, 1)$ pertençam a $U \cup W$ (pois $(1, 0) \in U$, e $(0, 1) \in W$), $(1, 0) + (0, 1) \notin U \cup W$ (pois $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$, $(1, 1) \notin U$, e $(1, 1) \notin W$).

(b) Seja $A \coloneqq \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ em $M_2(\mathbb{R})$. Resulta das definições de U e de W que $A \in U \cap W$ se, e somente se, (a, b, c, d) é uma solução do sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z + t & = & 0 \\ x + 2y + z + 2t & = & 0 \end{array} \right. .$$

Sendo assim, como

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z + t & = & 0 \\ x + 2y + z + 2t & = & 0 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z + t & = & 0 \\ y + t & = & 0 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z + t & = & 0 \\ y = -t & = & 0 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & -t \end{array} \right. ,$$

podemos concluir que $A \in U \cap W$ se, e somente se, $a = -c$, e $b = -d$. Logo,

$$U \cap W = \left\{ \begin{bmatrix} -z & -t \\ z & t \end{bmatrix} : z, t \in \mathbb{R} \right\}.$$