



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

# **Elementos de Máquinas para Automação**

**PMR 3307 – A10**

**Modelagem, carregamento e  
equilíbrio de eixos**

**Introdução ao problema de torção**

**2023.2**

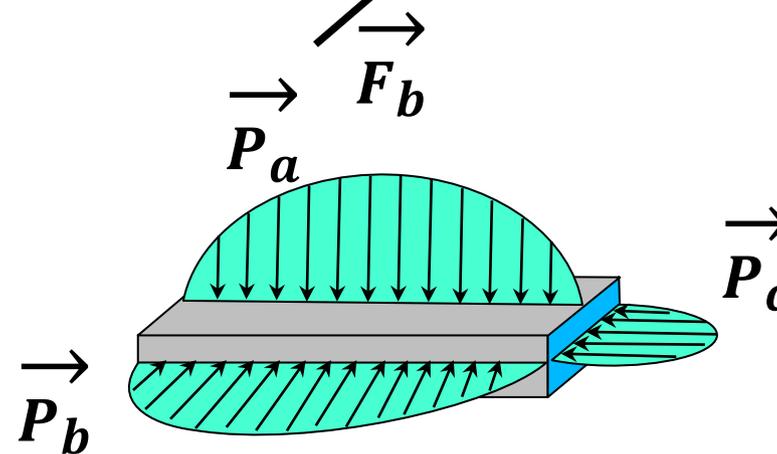
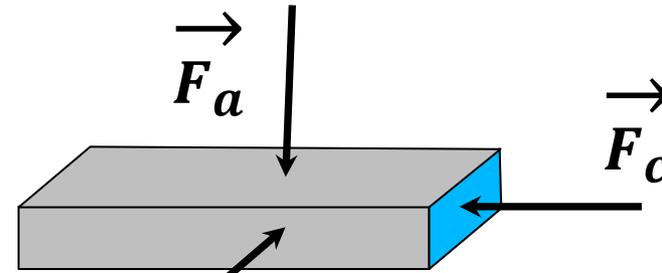


**RELEMBRANDO!**

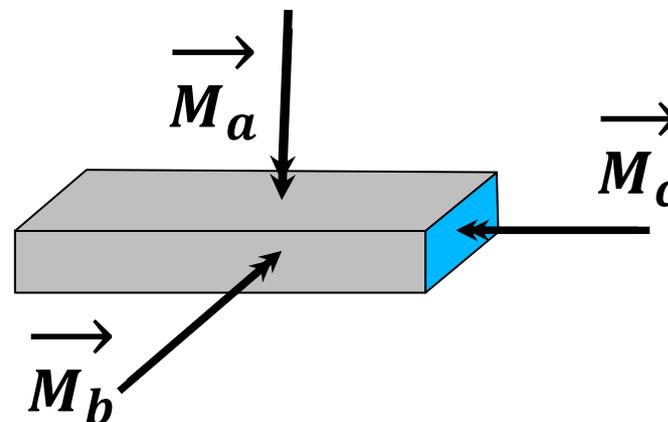
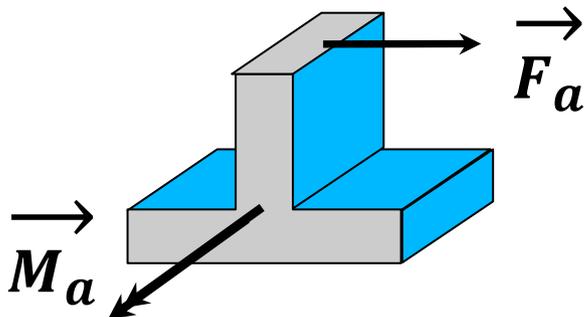
## Carregamentos

### Forças

- Concentrados
- Distribuídos



### Momentos (torques)

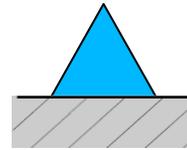




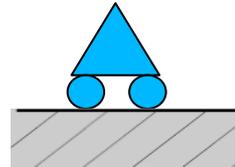
**RELEMBRANDO!**

## Apoios e Reações

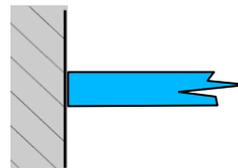
➤ **Fixo**



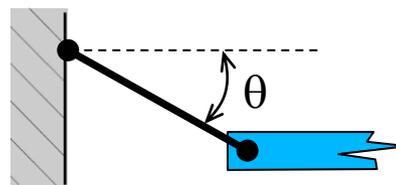
➤ **Deslizante**



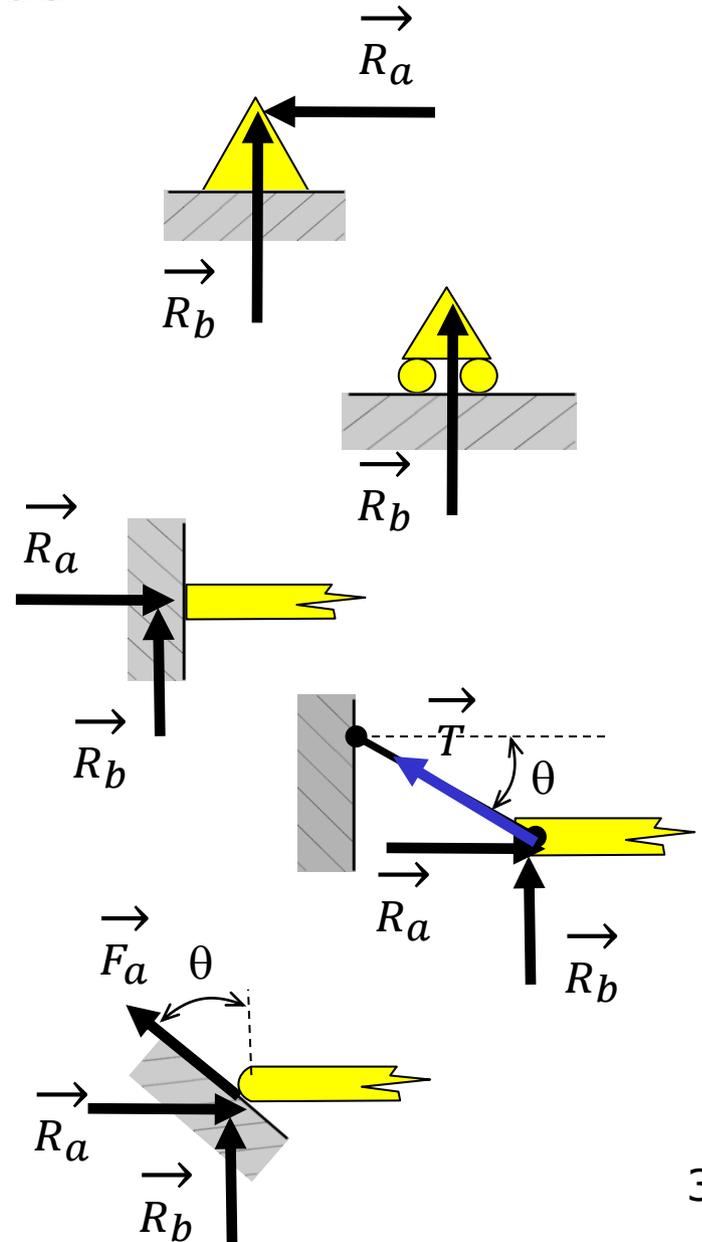
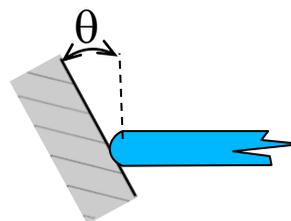
➤ **Engastado**



➤ **Com cabo**



➤ **Com contato**





## Tipos de eixos quanto ao movimento

### Estacionários - *axle* -

Elementos não rotativos/rotativos sobre o qual giram os componentes mecânicos.  
Não transmite potência nem movimento



são sujeitos a apenas a flexão devido aos apoios, e por isso Não transmitem torque. Um eixo não é torcido, apenas fleto.

### Rotativos - *shafts* -

Elemento rotativo utilizado para transmitir potência ou movimento  
Também denominados de Eixos árvore



estão sujeitos a flexão, torção e às vezes para cargas axiais (compressão e flambagem).



## Dimensionamento de eixos

### Estático

#### Torção

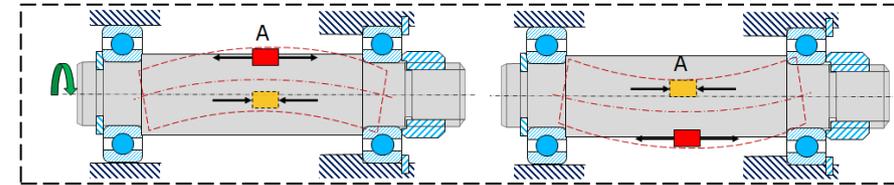
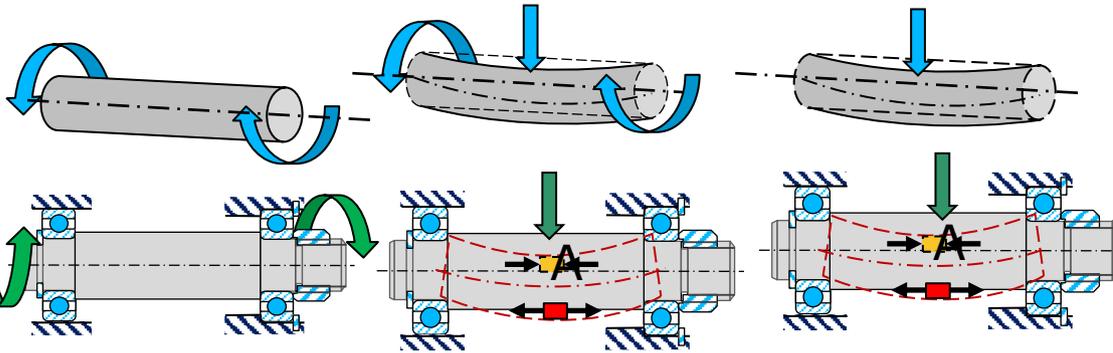
#### Flexo-torção

#### Flexão

### Dinâmico

#### Fadiga

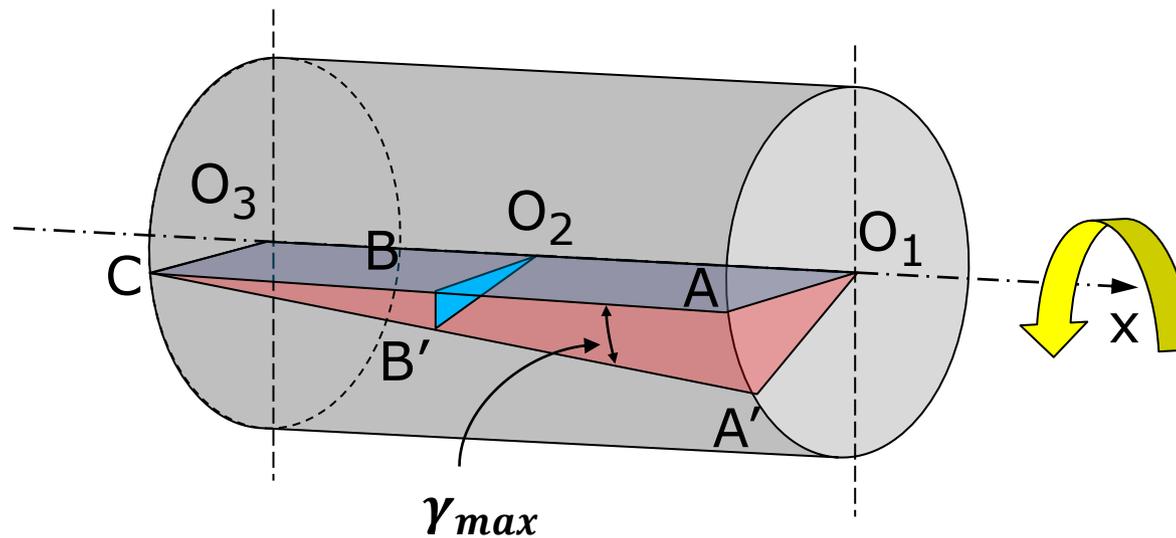
#### Balanceamento





## Torção

Elementos de seção circular formas normalmente encontradas em eixos também devem ser analisados sob o ponto de vista de carregamentos torcionais e flexo-torcionais.

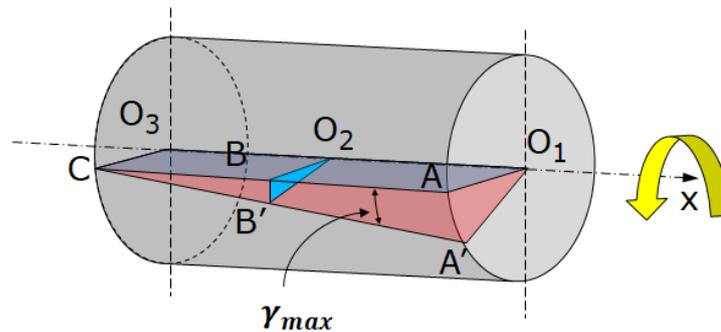




## Torção

### Premissas básicas

- O material é homogêneo, no campo elástico
- Uma seção plana do material permanece plana após a aplicação do torque
- Um membro circular sujeito à ação de um conjugado, as deformações angulares  $\gamma$  variam linearmente a partir do eixo central

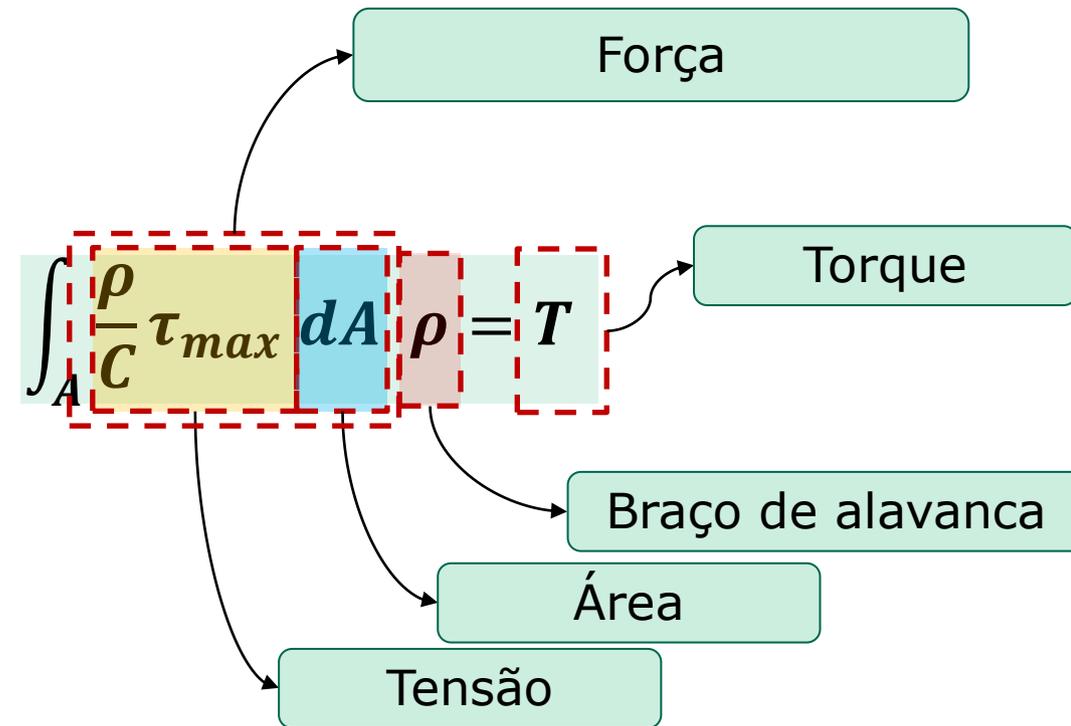
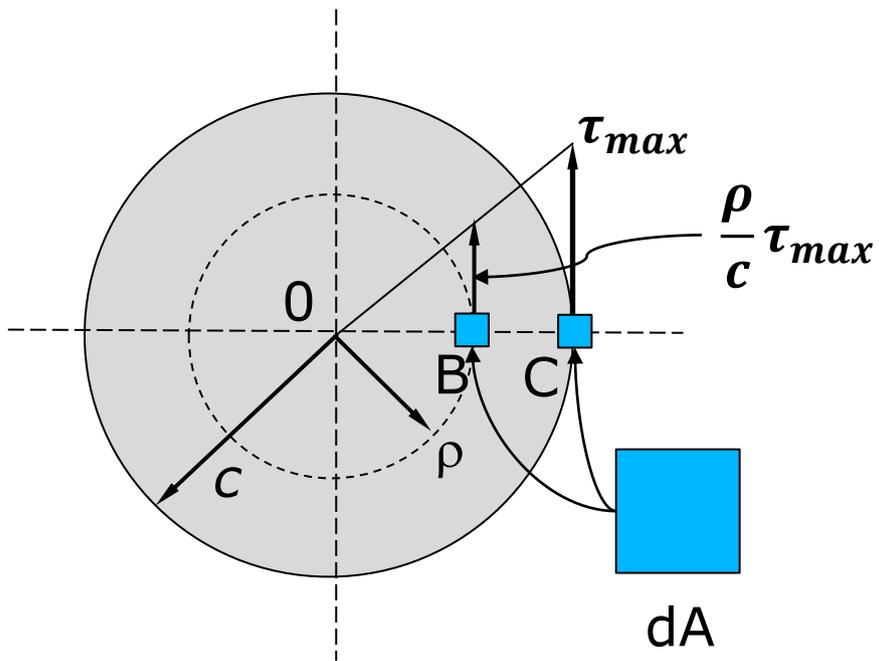


- A tensão cisalhante é proporcional a deformação angular



## Formula de Torção

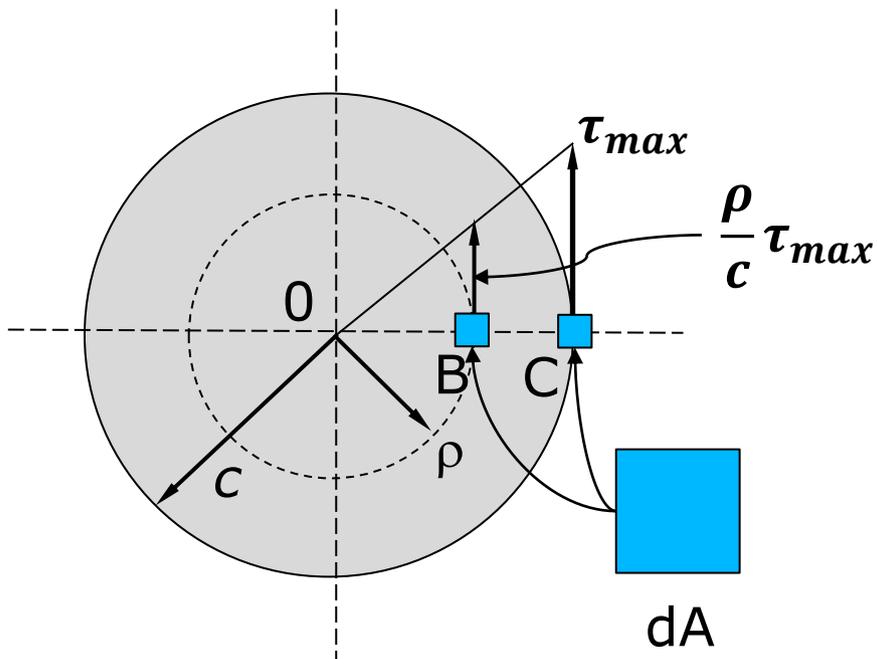
- Para eixo circular maciço no campo elástico.





## Formula de Torção

- Para eixo circular maciço no campo elástico.



$$\frac{\tau_{max}}{c} \int_A \rho^3 dA = T$$

- $T$  = torque resistente

$$J = \int_A \rho^2 dA = \int_0^c 2\pi\rho^3 d\rho$$

- $J$  = momento polar de inércia

$$J = \frac{c\pi^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\frac{\tau_{max}}{c} J = T$$

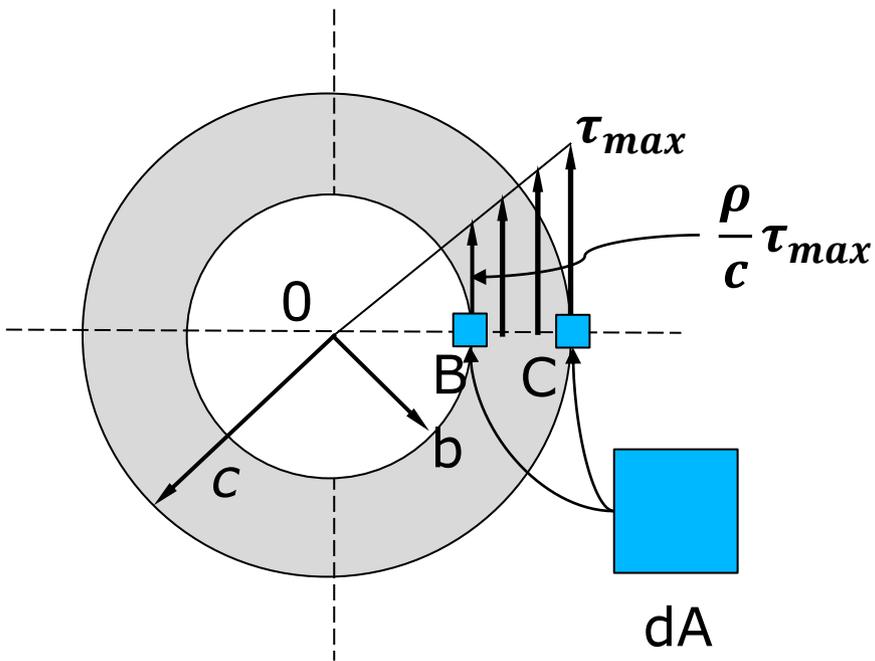
$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{max} = \frac{T\rho}{J}$$





## Formula de Torção

- Para eixo tubular no campo elástico.



$$J = \int_A \rho^2 dA = \int_b^c 2\pi\rho^3 d\rho$$

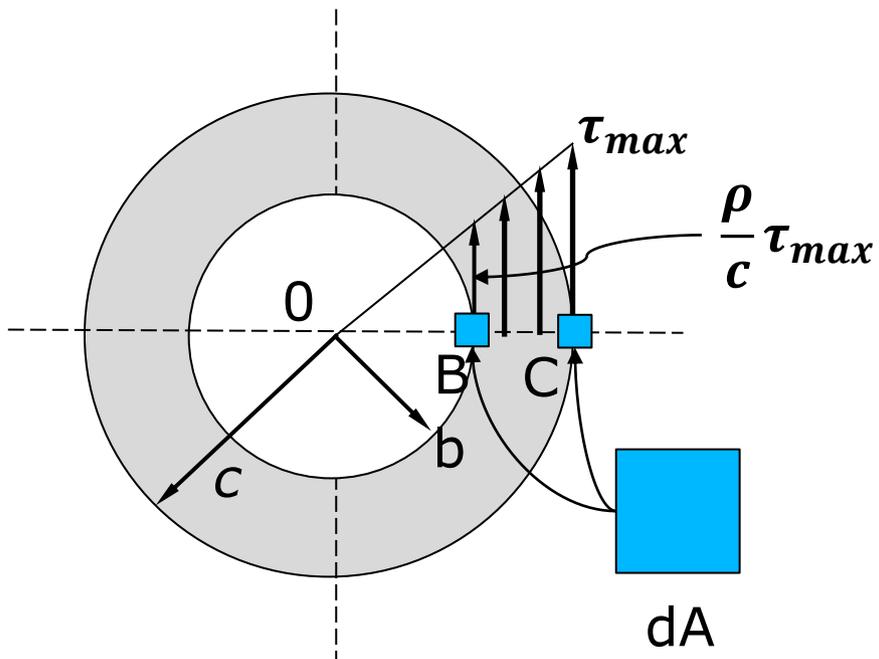
$$J = \int_b^c 2\pi\rho^3 d\rho = 2\pi \left( \frac{\rho^4}{4} \right)_{c,b}$$

$$J = 2\pi \left( \frac{\rho^4}{4} \right)_{c,b} = \frac{\pi}{2} (c^4 - b^4)$$



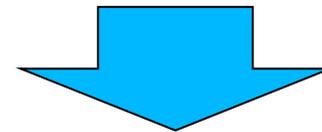
## Formula de Torção

- Para eixo tubular no campo elástico.



- Para tubos de paredes finas, onde  $B \rightarrow C$ , ou  $B \approx C$  temos para o campo elástico.

$$J = \frac{\pi}{2} (c^4 - b^4)$$

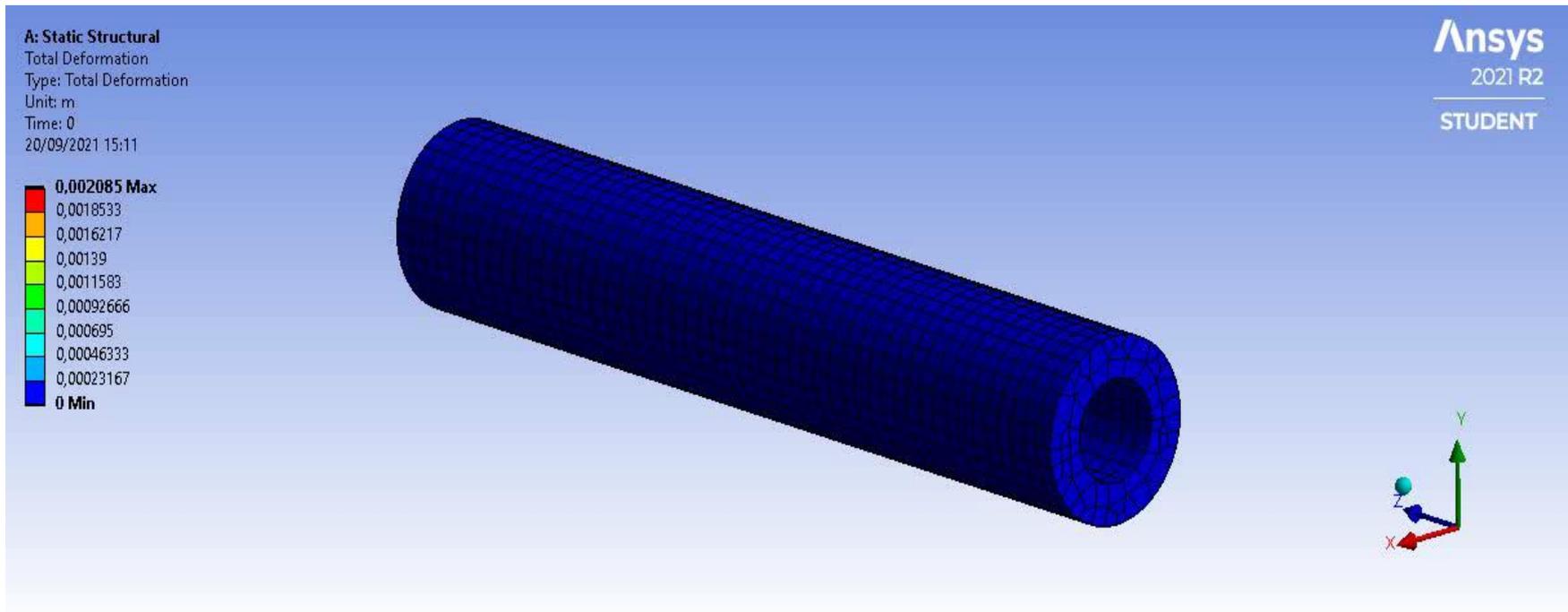


$$J \cong 2\pi c^3 t$$



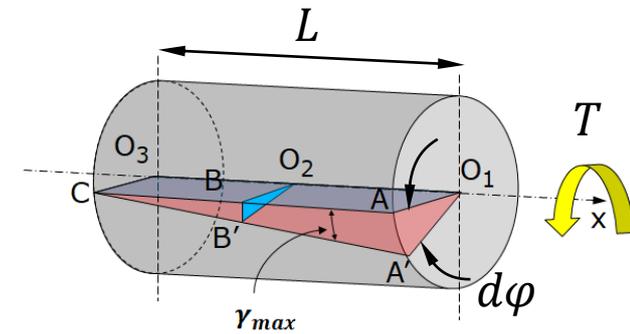
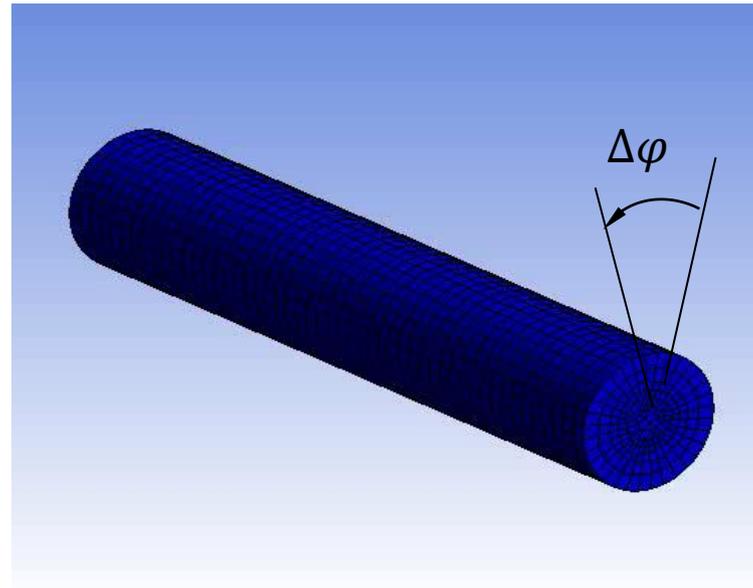
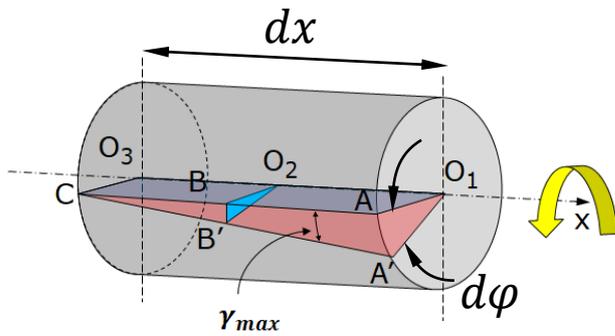
## Formula de Torção

- Para eixo tubular no campo elástico.





## ângulo de torção em eixos circulares



$$\varphi = \int_0^x \frac{T(x)}{J(x)G} dx + C_1$$

Ângulo de torção na origem

Módulo de elasticidade torcional

Momento torcional

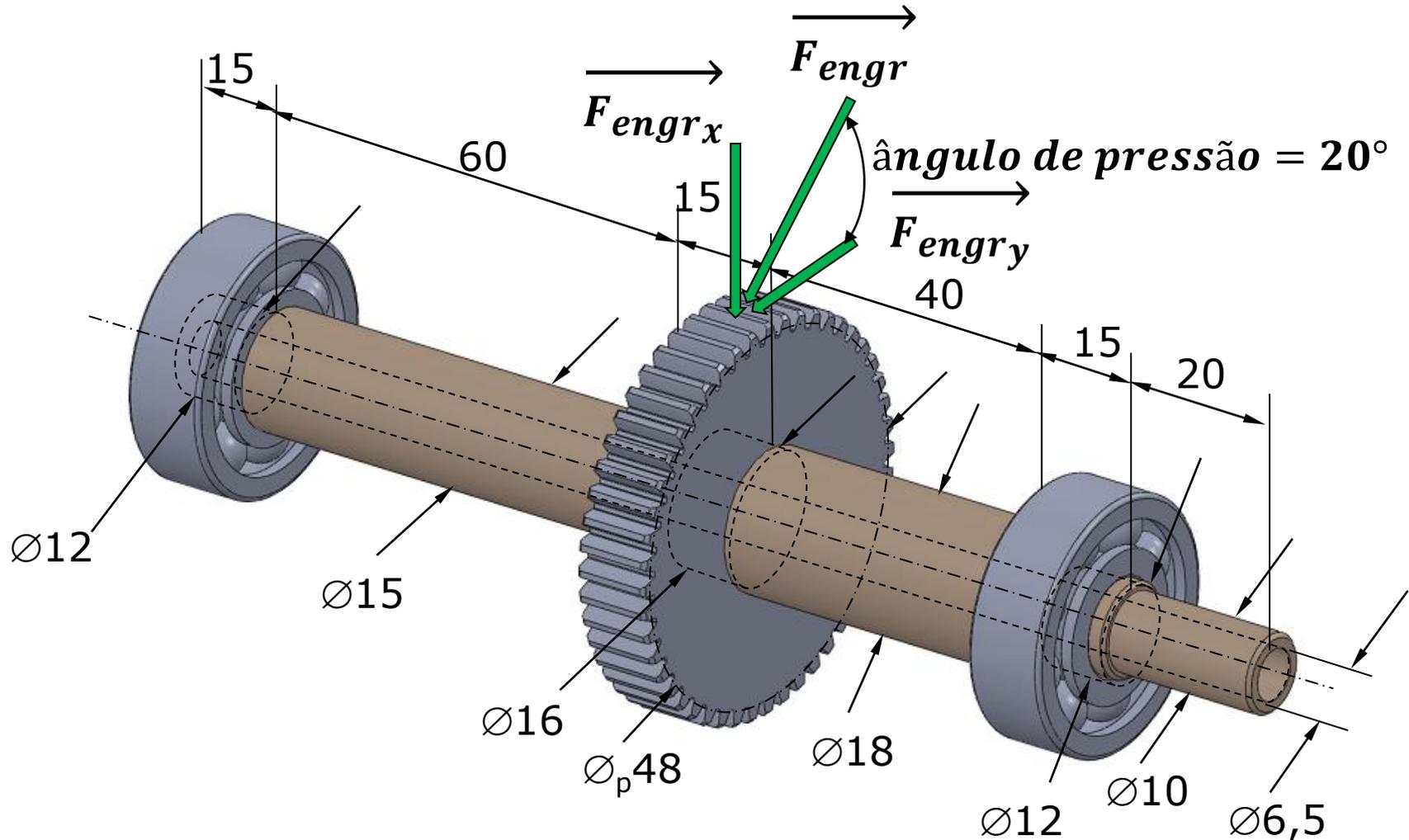
$$\Delta\varphi = \int_0^L \frac{T(x)}{J(x)G} dx$$

$$\Delta\varphi = \frac{T(x)}{J(x)G} \int_0^L dx$$

$$\Delta\varphi = \frac{TL}{J_i G}$$



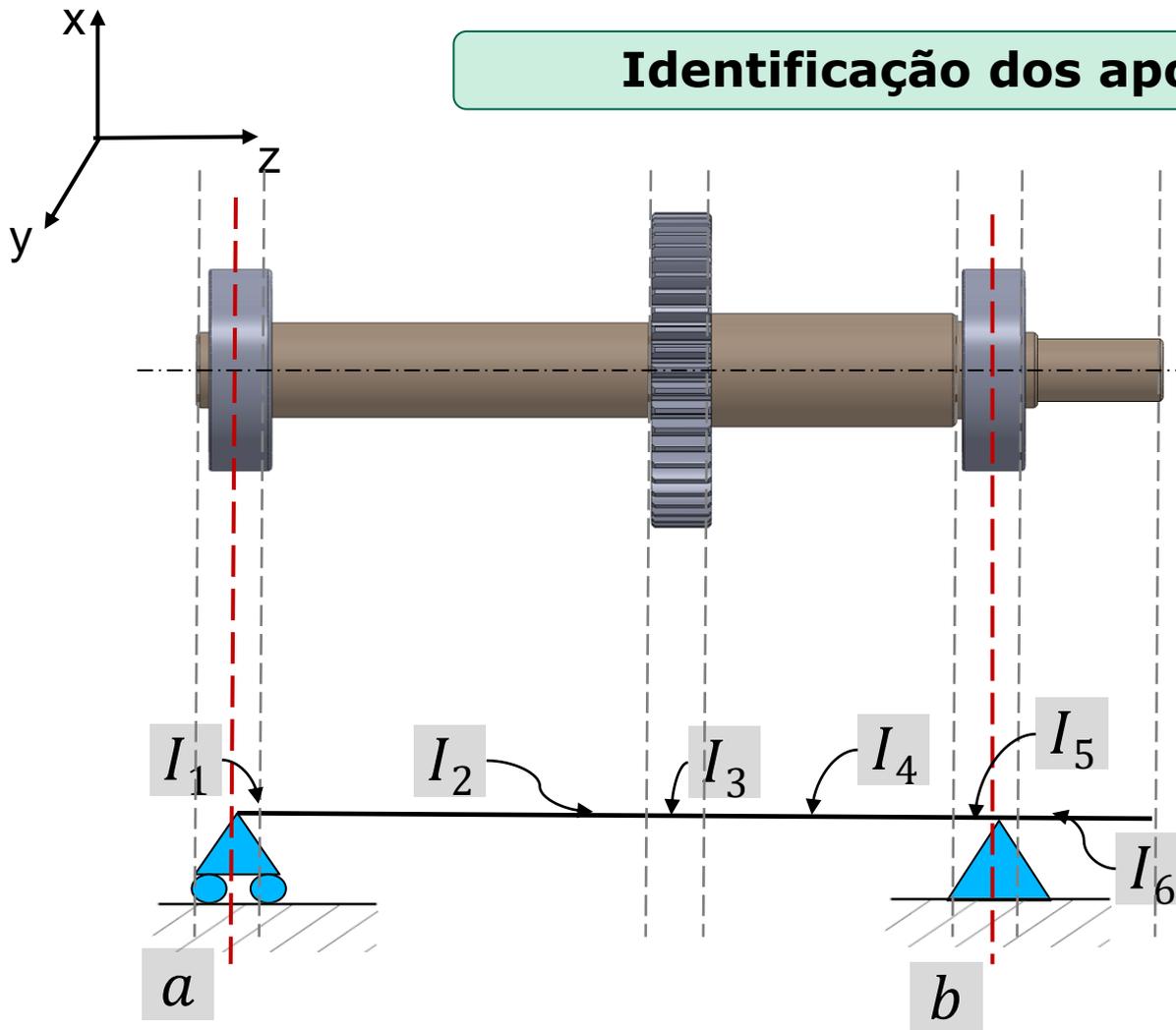
## Modelagem, carregamento e equilíbrio de eixos





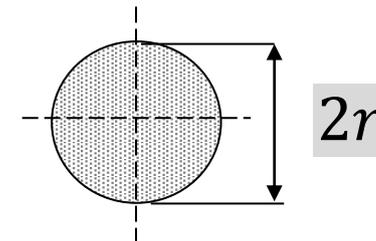
## Modelagem, carregamento e equilíbrio de eixos

### Identificação dos apoios

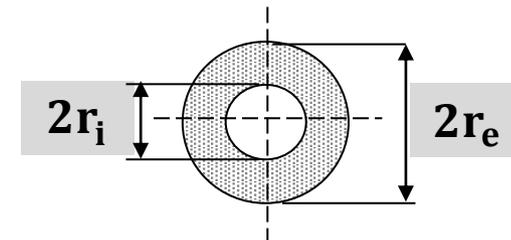


$I_n =$  Momento de inércia da seção

$$I_n = \frac{\pi r^4}{4}$$



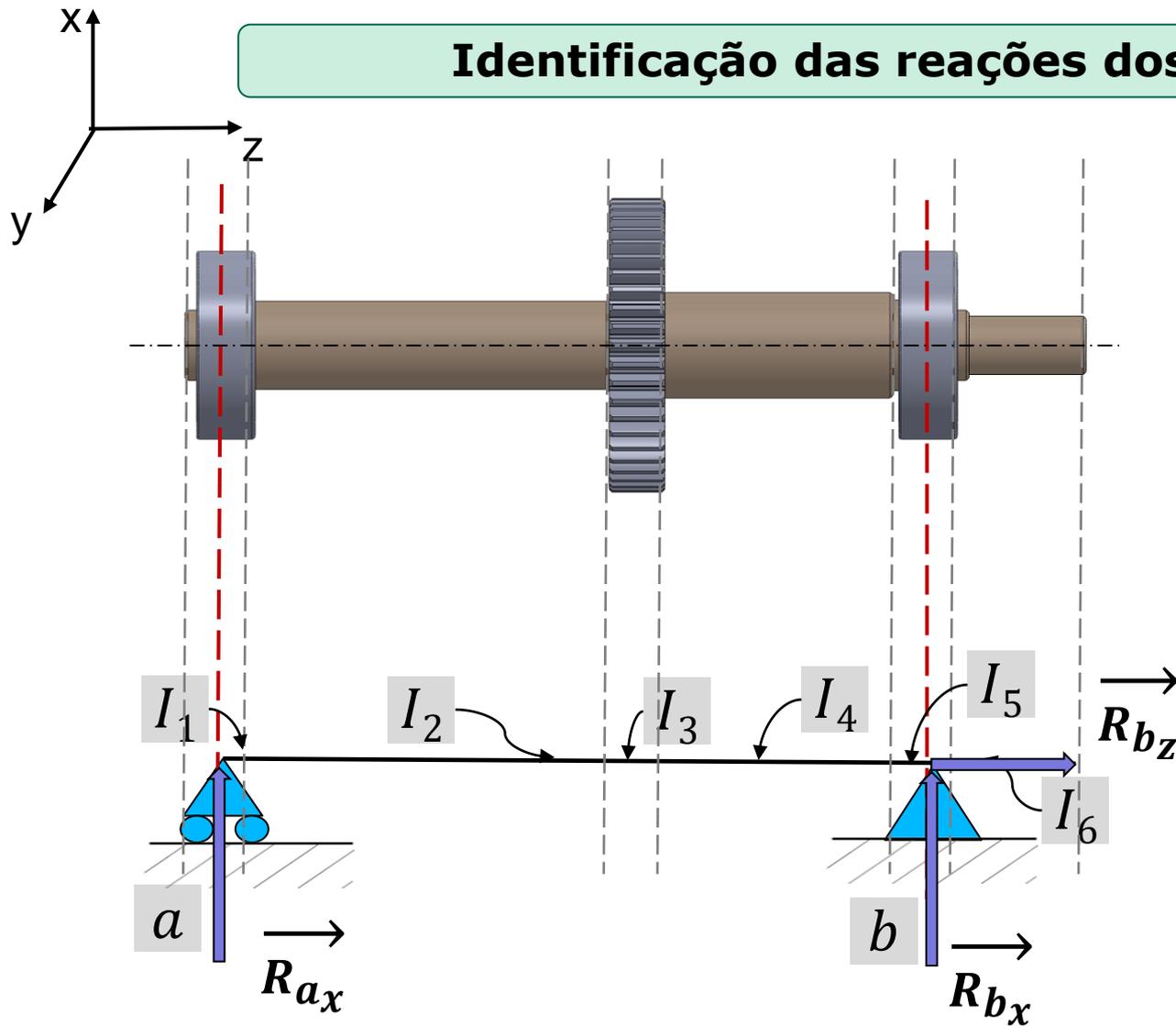
$$I_n = \frac{\pi}{4} (r_e^4 - r_i^4)$$





## Exemplo 1

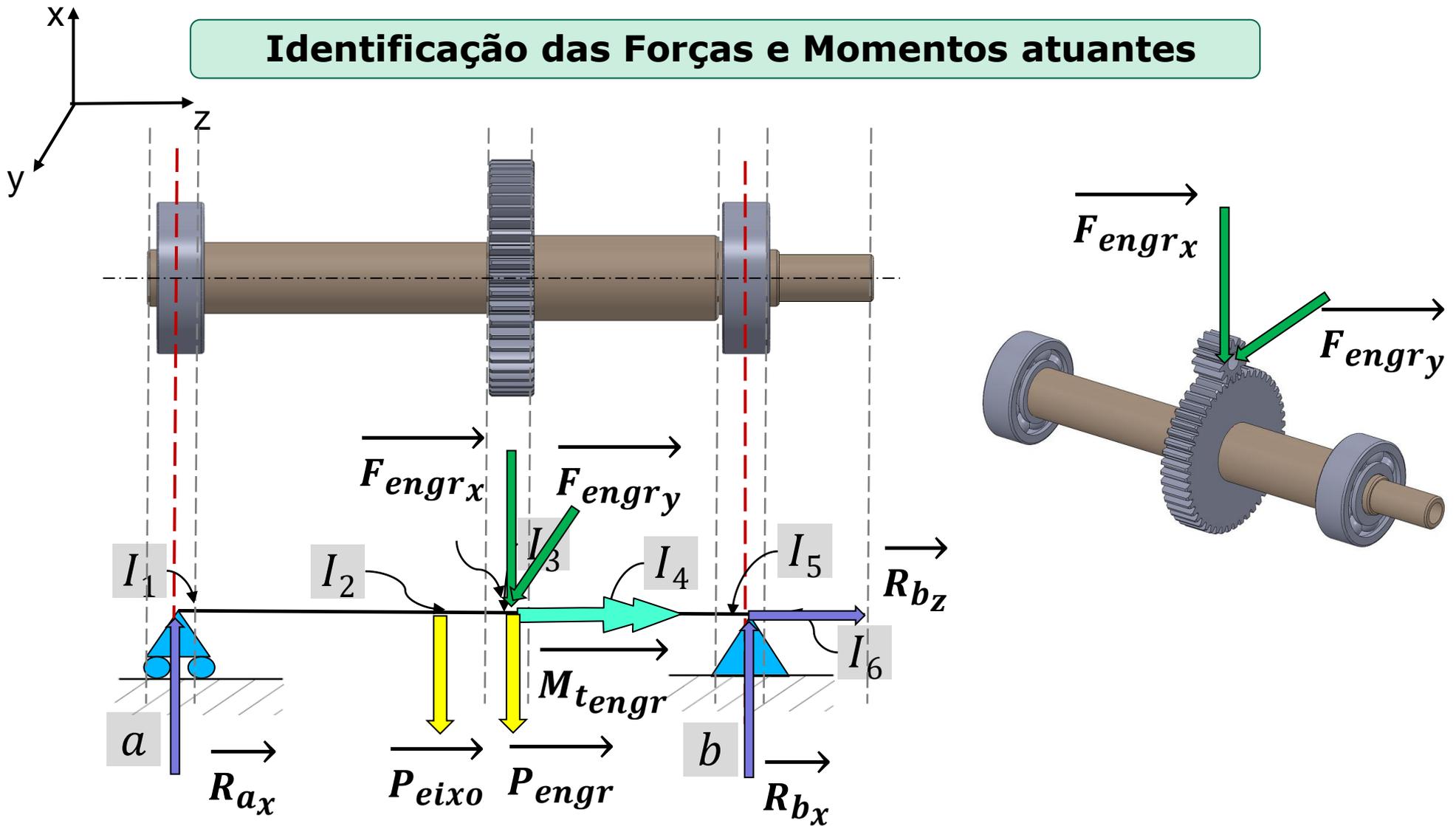
### Identificação das reações dos apoios





## Exemplo 1

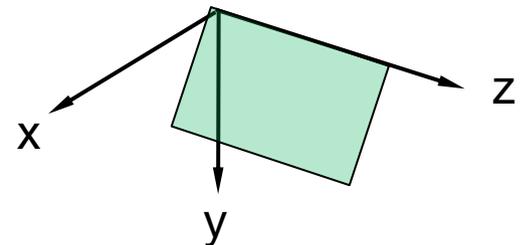
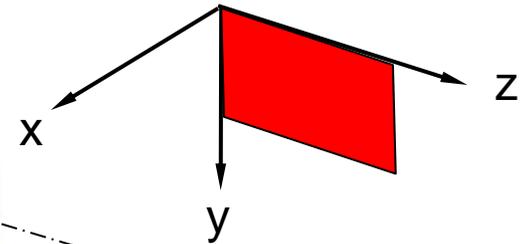
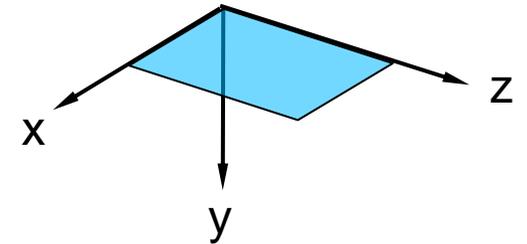
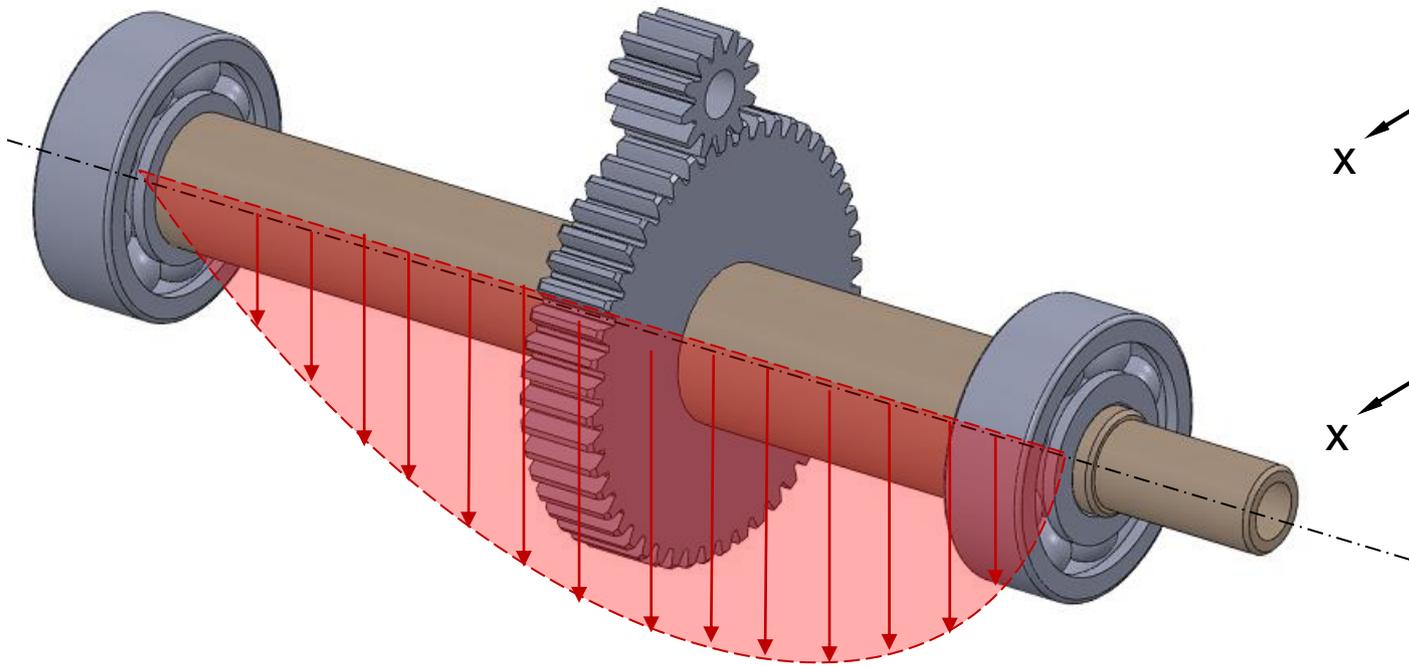
### Identificação das Forças e Momentos atuantes





**Exemplo 1**

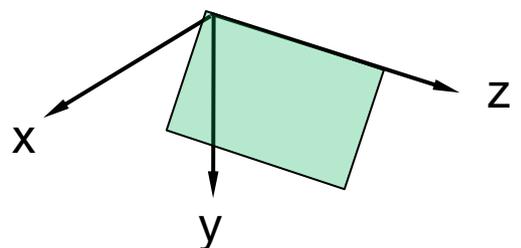
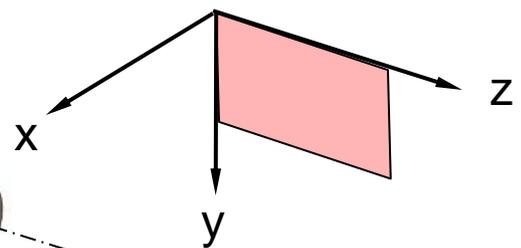
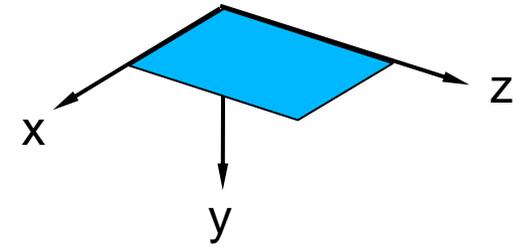
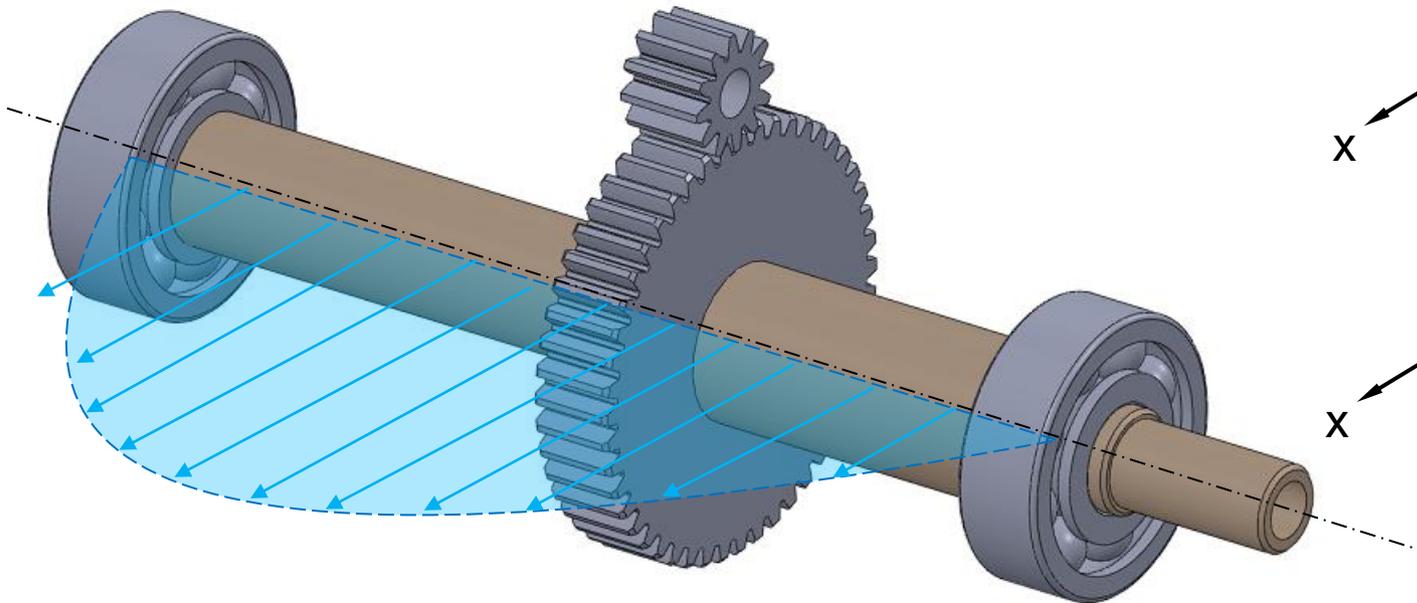
**Calcular os esforços resultantes**





**Exemplo 1**

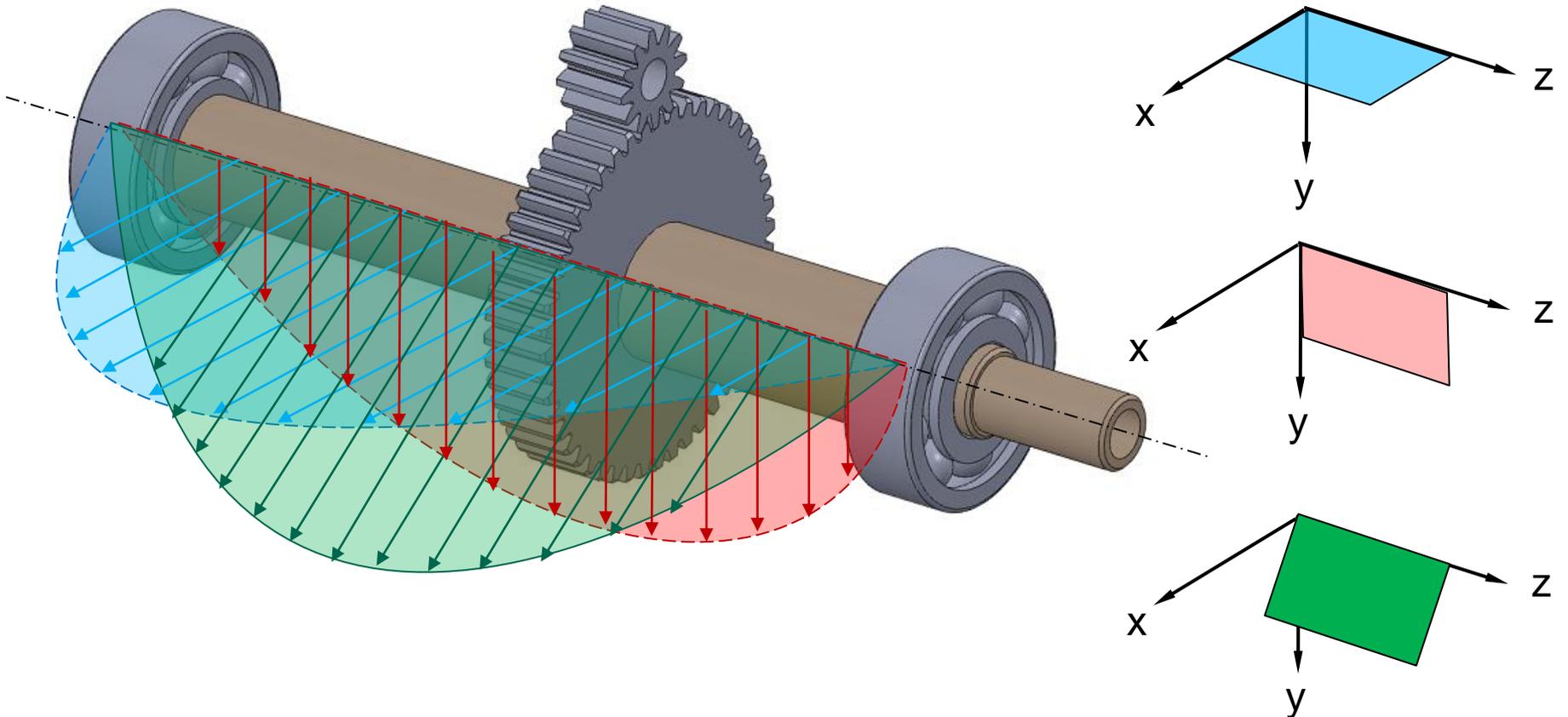
**Calcular os esforços resultantes**





**Exemplo 1**

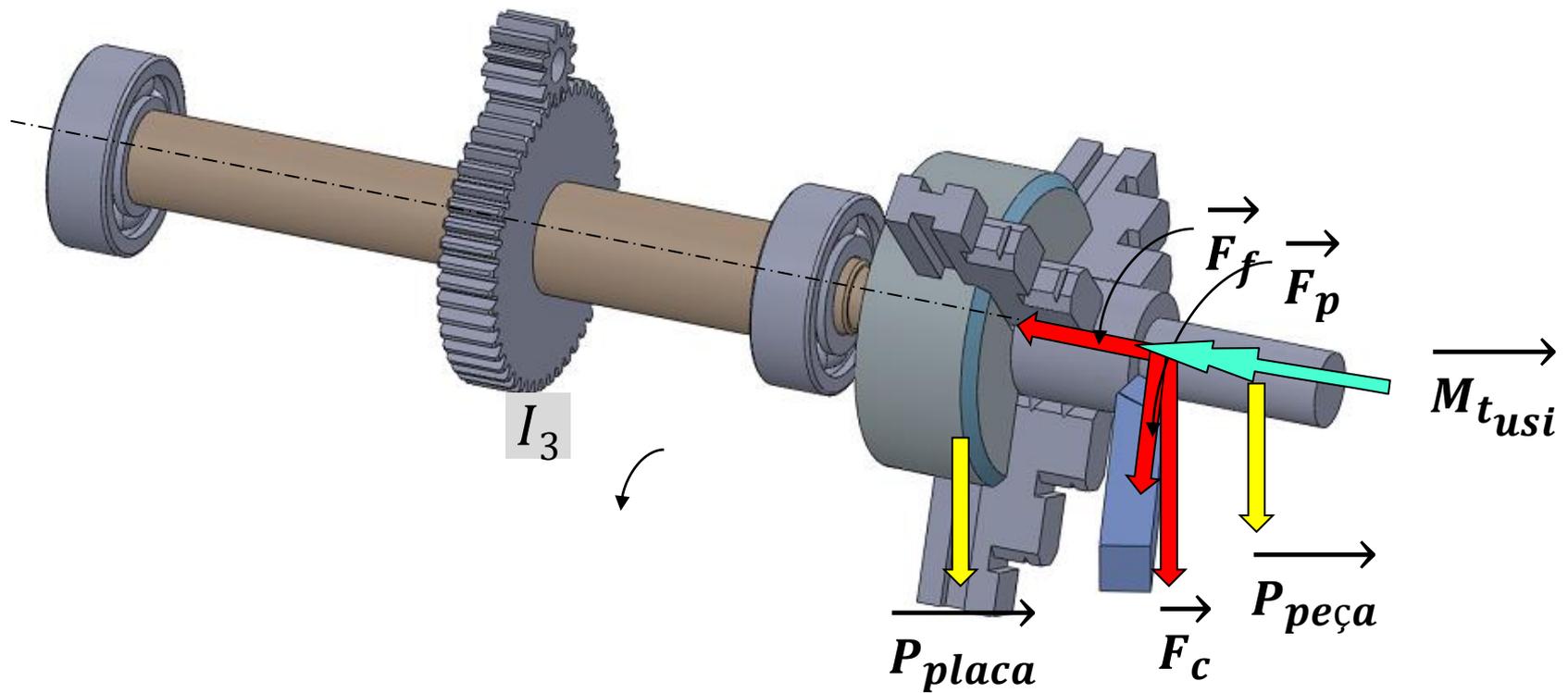
**Calcular os esforços resultantes**





## Exemplo 1

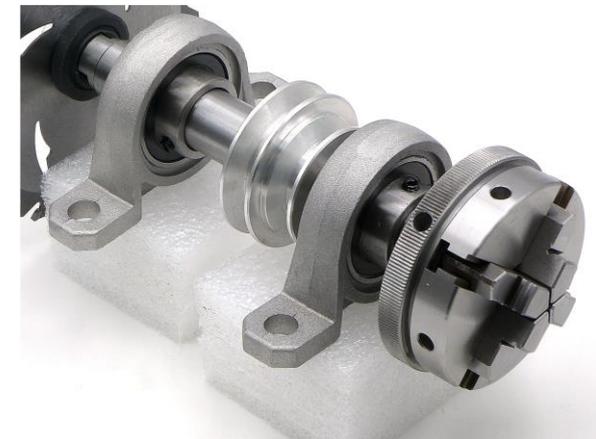
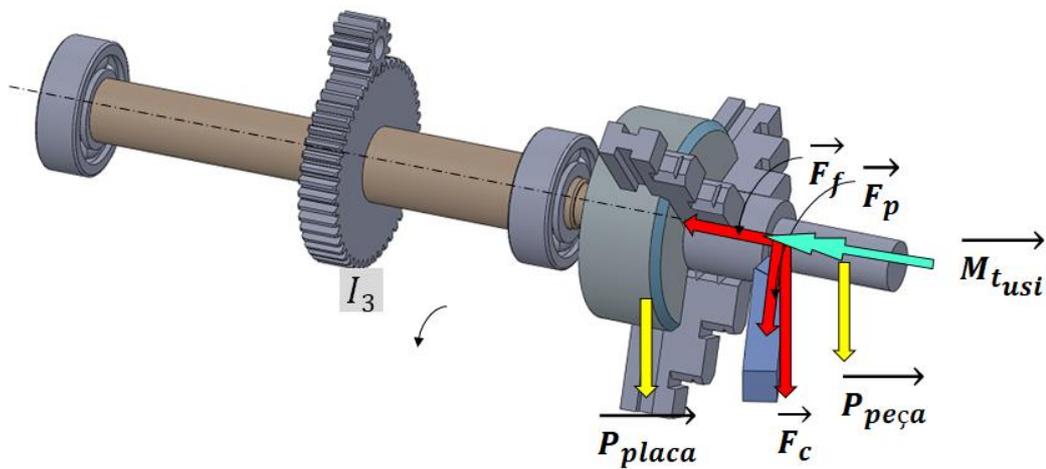
considerar outras cargas envolvidas





## Exemplo 1

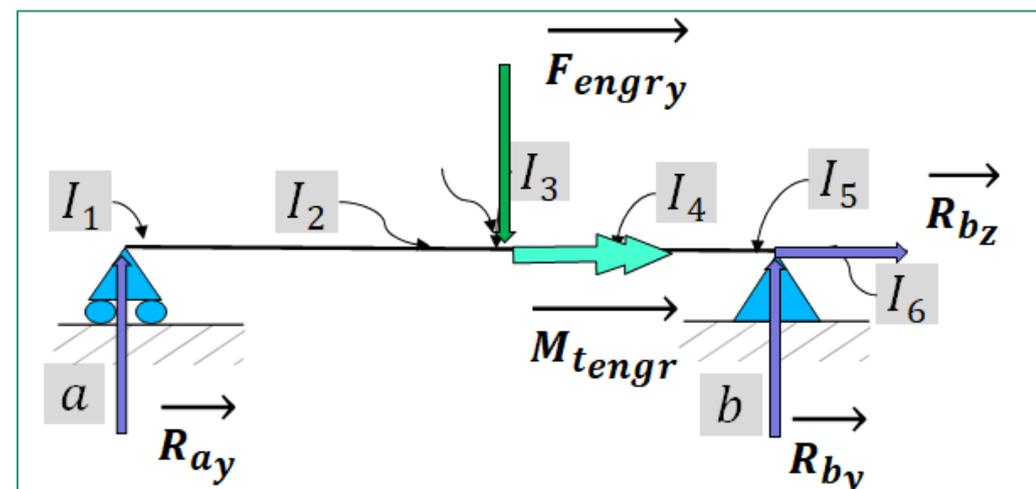
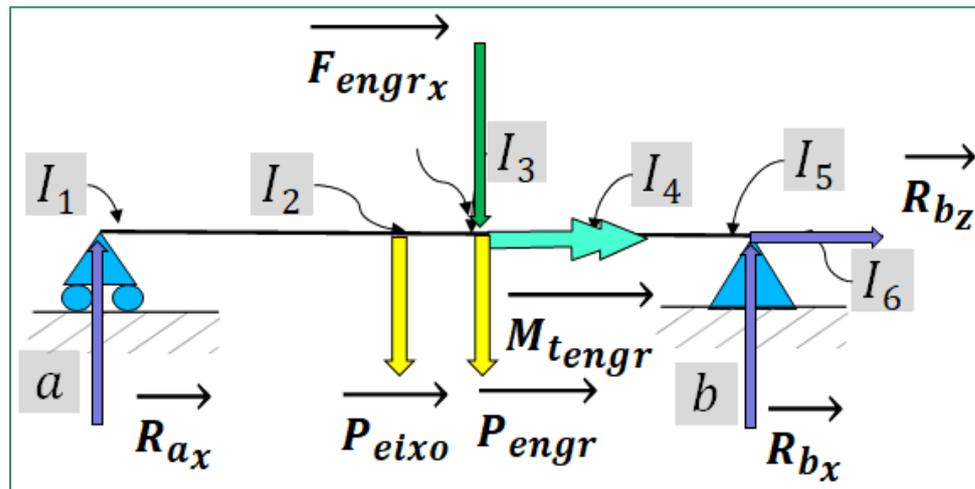
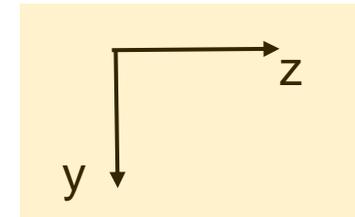
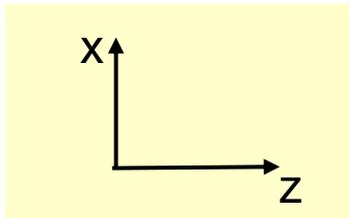
considerar outras cargas envolvidas





## Exemplo 1

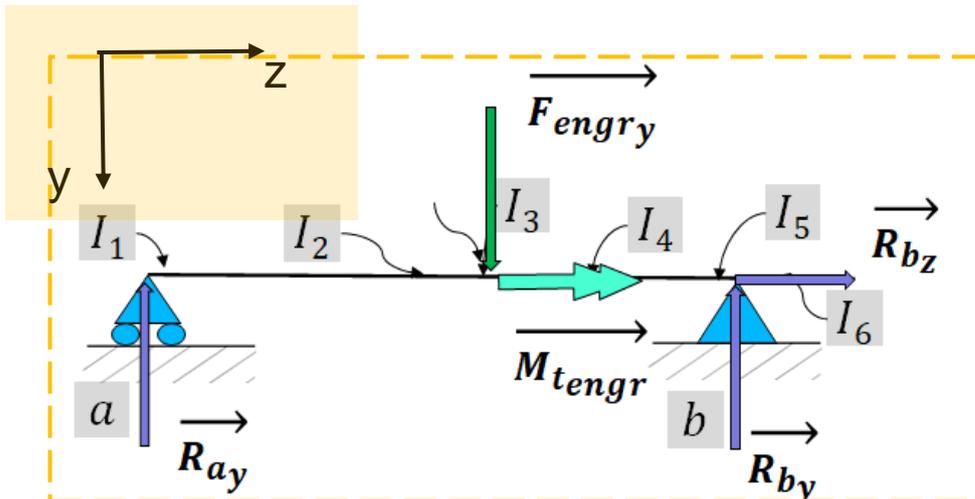
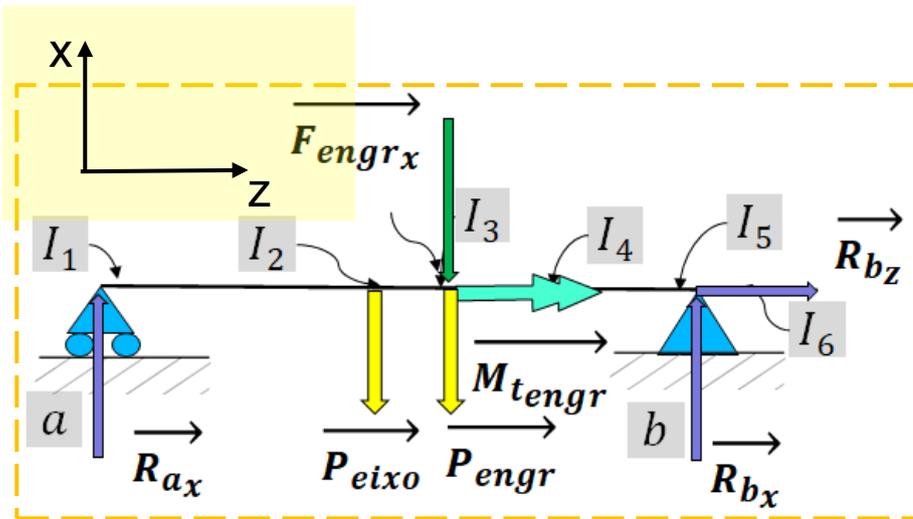
### Diagramas de corpo livre





## Exemplo 1

### Diagramas de corpo livre



### Condição de equilíbrio

$$\sum_{Ref} \vec{F}_n = 0$$

$$\sum \vec{F}_{ref_x} = 0 \quad \uparrow X(+)$$

$$\sum \vec{F}_{ref_y} = 0 \quad \searrow Y(+)$$

$$\sum_{Ref} \vec{M}_n = 0$$

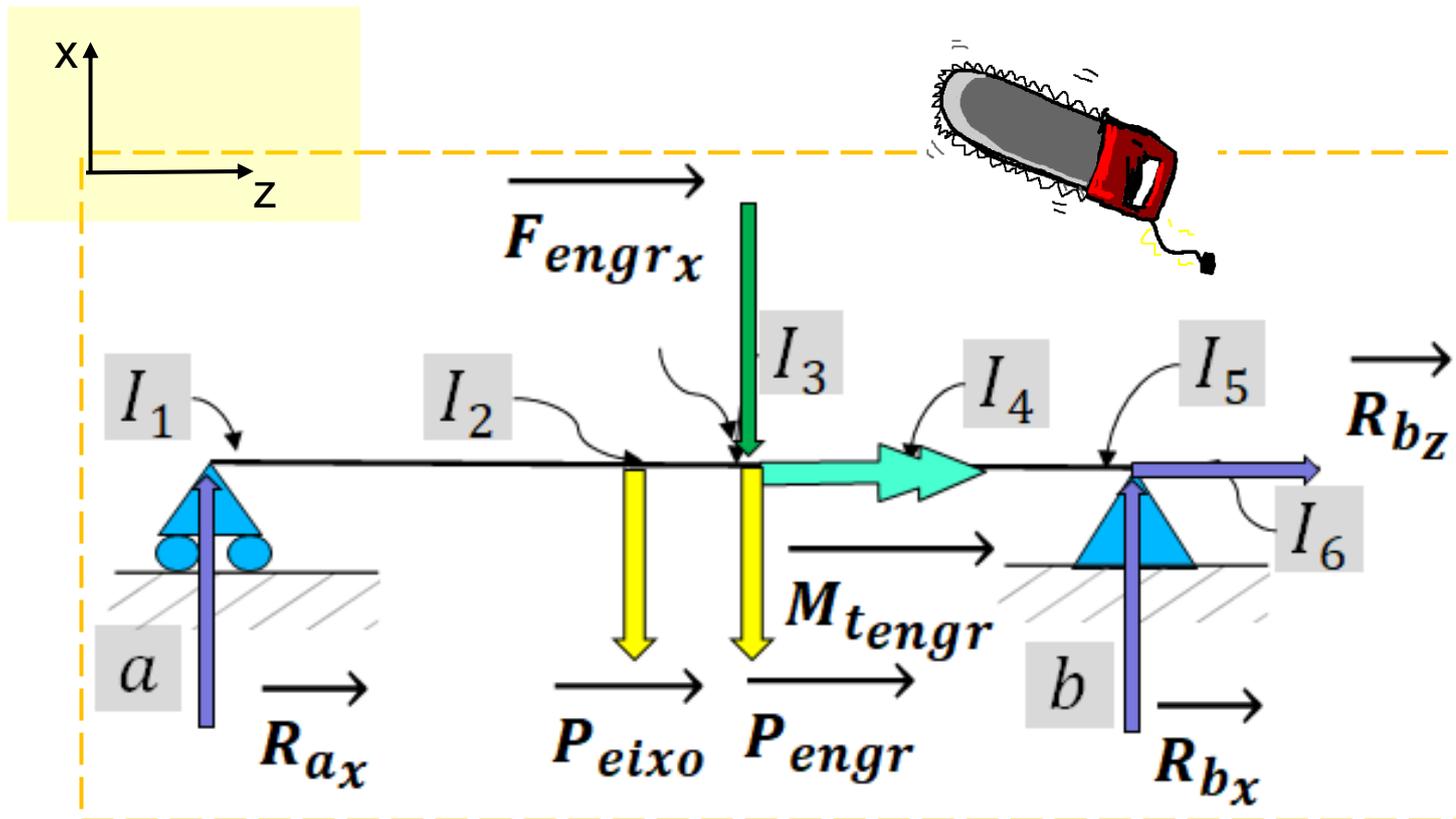
$$\sum \vec{F}_{ref_z} = 0 \quad \vec{Z}(+)$$

### Determinação das reações



## Exemplo 1

### Método das seções





**Diagramas de esforços**

**Appendix D-2** *Shear, Moment, and Deflection Equations for Simply Supported Beams*

	Slope at Ends, $\theta$	Maximum Deflection, $\delta_{max}$	Deflection $\delta$ at Any Point $x$
<p>1. Concentrated center load</p>	$\frac{PL^2}{16EI}$	<p>At center:</p> $\frac{PL^3}{48EI}$	<p>For <math>0 \leq x \leq L/2</math>:</p> $\frac{Px}{12EI} \left( \frac{3L^2}{4} - x^2 \right)$
<p>2. Concentrated load at any point</p>	<p>At left end:</p> $\frac{Pb(L^2 - b^2)}{6LEI}$	<p>At <math>x = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}</math>:</p> $\frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}LEI}$	<p>For <math>0 \leq x \leq a</math>:</p> $\frac{Pbx}{6LEI} (L^2 - x^2 - b^2)$



**Diagramas de esforços**

**Appendix D-2** *Shear, Moment, and Deflection Equations for Simply Supported Beams*

	Slope at Ends, $\theta$	Maximum Deflection, $\delta_{max}$	Deflection $\delta$ at Any Point $x$
<p>3. Uniform load</p>	$\frac{wL^3}{24EI}$	$\frac{5wL^4}{384EI}$	$\frac{wx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$
<p>4. Overhung load</p>	<p>At left support:</p> $\frac{Pab}{6EI}$ <p>At right support:</p> $\frac{Pab}{3EI}$ <p>At load:</p> $\frac{Pb}{6EI}(2L + b)$	$\delta_{max} = \frac{Pb^2L}{3EI}$	<p>For <math>0 \leq x \leq a</math>:</p> $\frac{Pbx}{6aEI}(x^2 - a^2)$ <p>For <math>0 \leq z \leq b</math>:</p> $\frac{P}{6EI}[z^3 - b(2L + b)z + 2b^2L]$



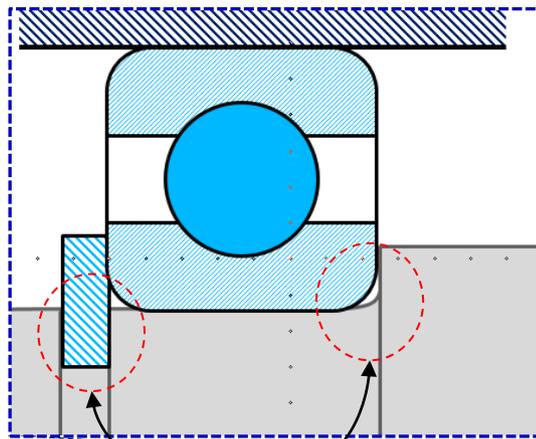
Diagramas de esforços

Appendix D-2 Shear, Moment, and Deflection Equations for Simply Supported Beams

	Slope at Ends, $\theta$	Maximum Deflection, $\delta_{max}$	Deflection $\delta$ at Any Point $x$
<p>5. Moment load between support</p>	<p>At left support:  <math display="block">\frac{-M_0}{6EI}(2L^2 - 6aL + 3a^2)</math></p> <p>At load:  <math display="block">\frac{M_0}{EI} \left( \frac{L}{3} + \frac{a^2}{L} - a \right)</math></p> <p>At right support:  <math display="block">\frac{M_0}{6EI}(L^2 - 3a^2)</math></p>	<p>At load:  <math display="block">\frac{M_0 a}{3EI}(2a^2 - 3aL + L^2)</math></p>	<p>For <math>0 \leq x \leq a</math>:  <math display="block">\frac{M_0 x}{6EI}(x^2 + 3a^2 - 6aL + 2L^2)</math></p>
<p>6. Overhanging moment load</p>	<p>At left support:  <math display="block">\frac{M_0 a}{6EI}</math></p> <p>At right support:  <math display="block">\frac{M_0 a}{3EI}</math></p> <p>At load:  <math display="block">\frac{M_0(a + 3b)}{3EI}</math></p>	<p><math display="block">\delta_{max} = \frac{M_0 b}{6EI}(2L + b)</math></p>	<p>For <math>0 \leq x \leq a</math>:  <math display="block">-\frac{M_0 x}{6aEI}(a^2 - x^2)</math></p> <p>For <math>0 \leq x' \leq b</math>:  <math display="block">\frac{M_0}{6EI}(2ax' + 3x'^2)</math></p>

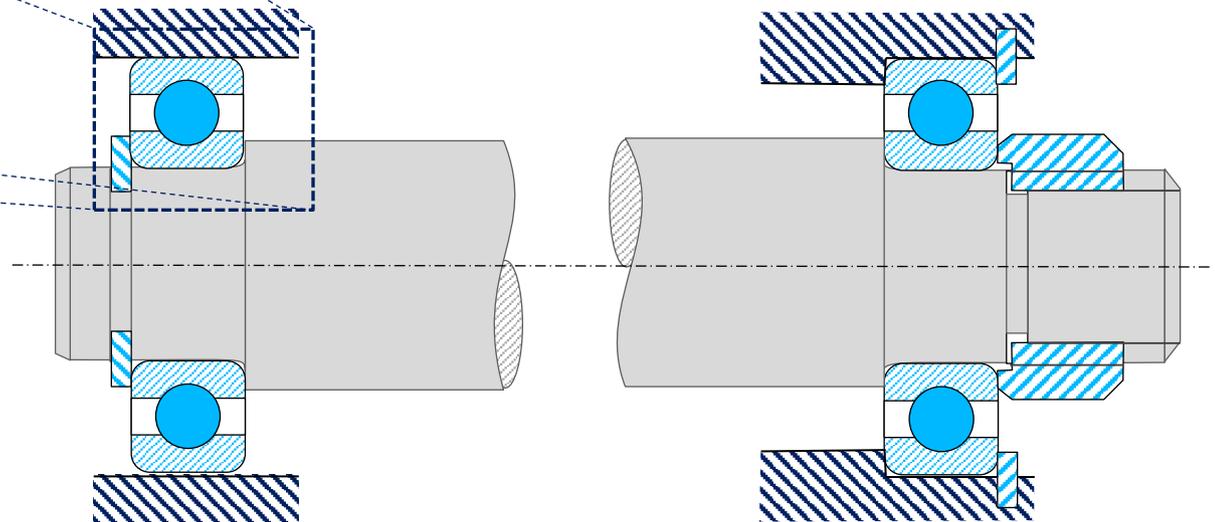
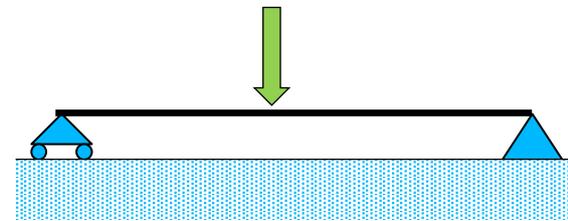


Aplicar os fatores de concentração de tensões



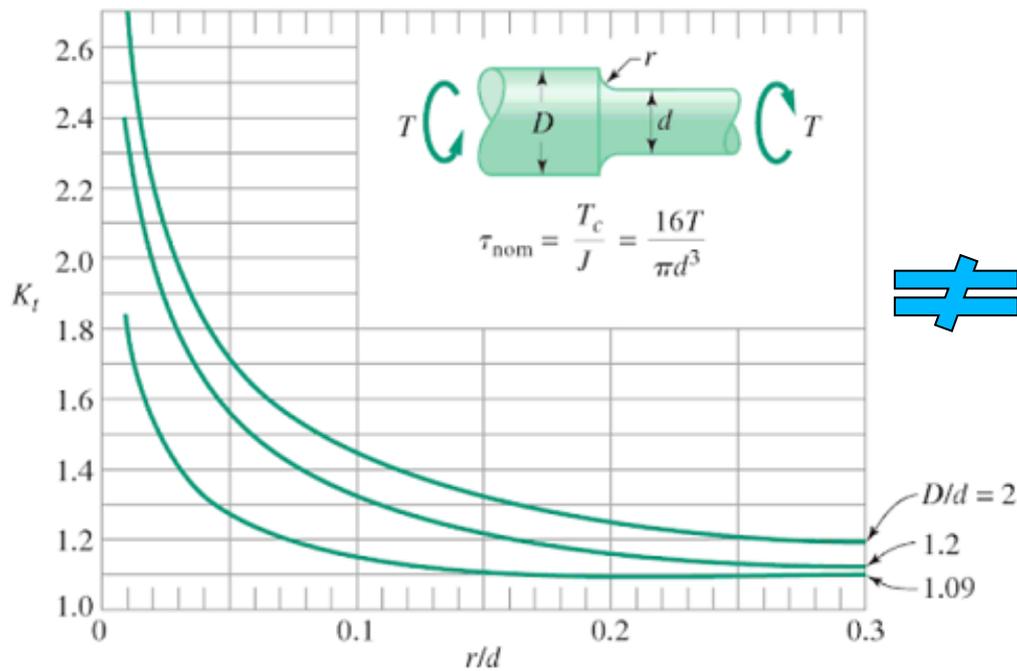
Concentradores de tensões

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_0}$$

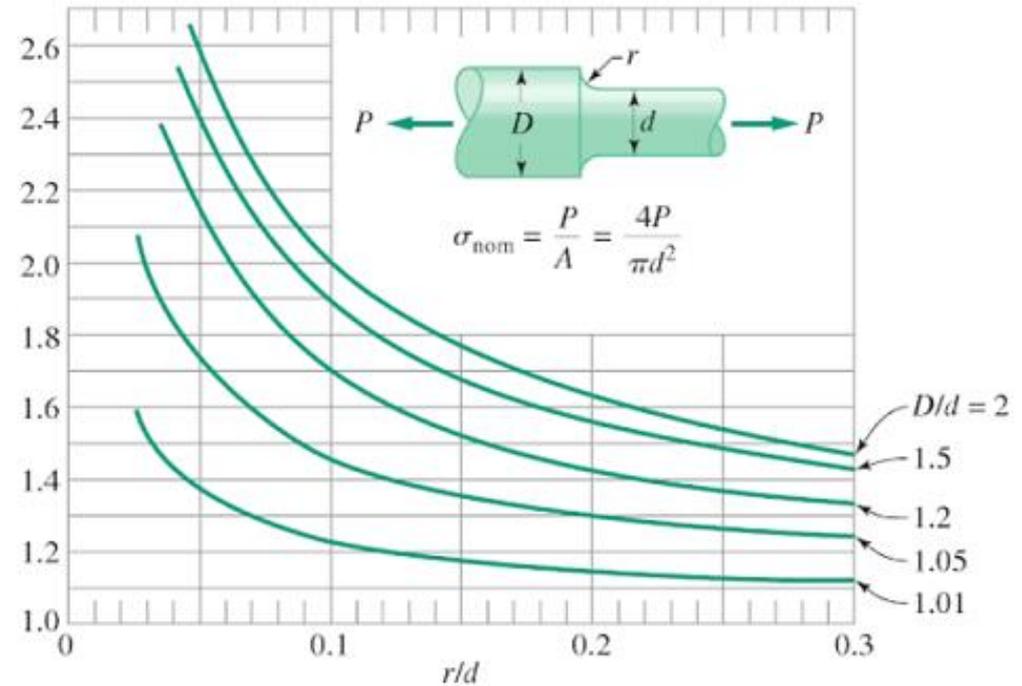




Aplicar os fatores de concentração de tensões

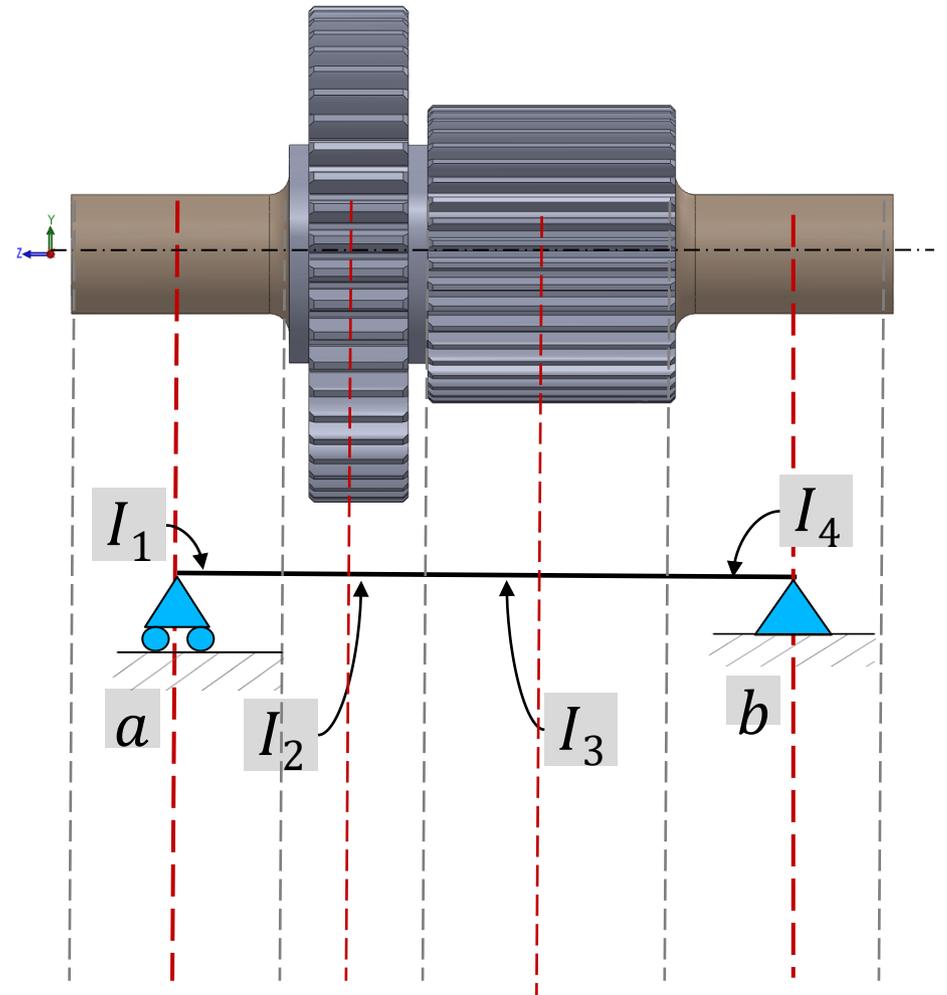
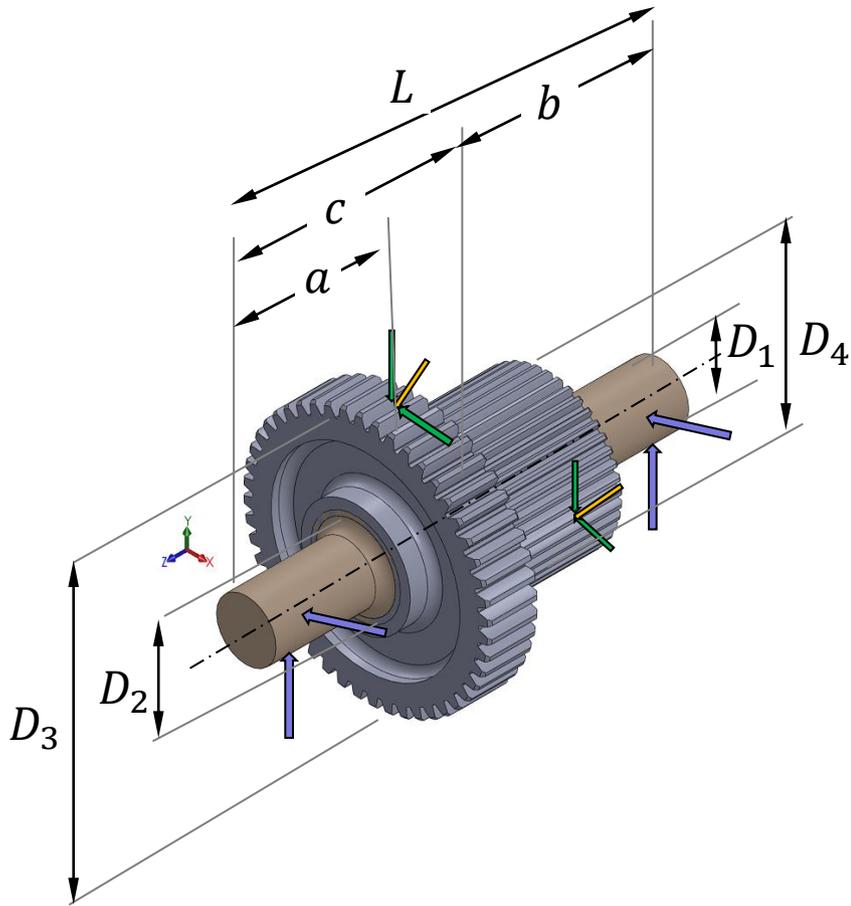


≠



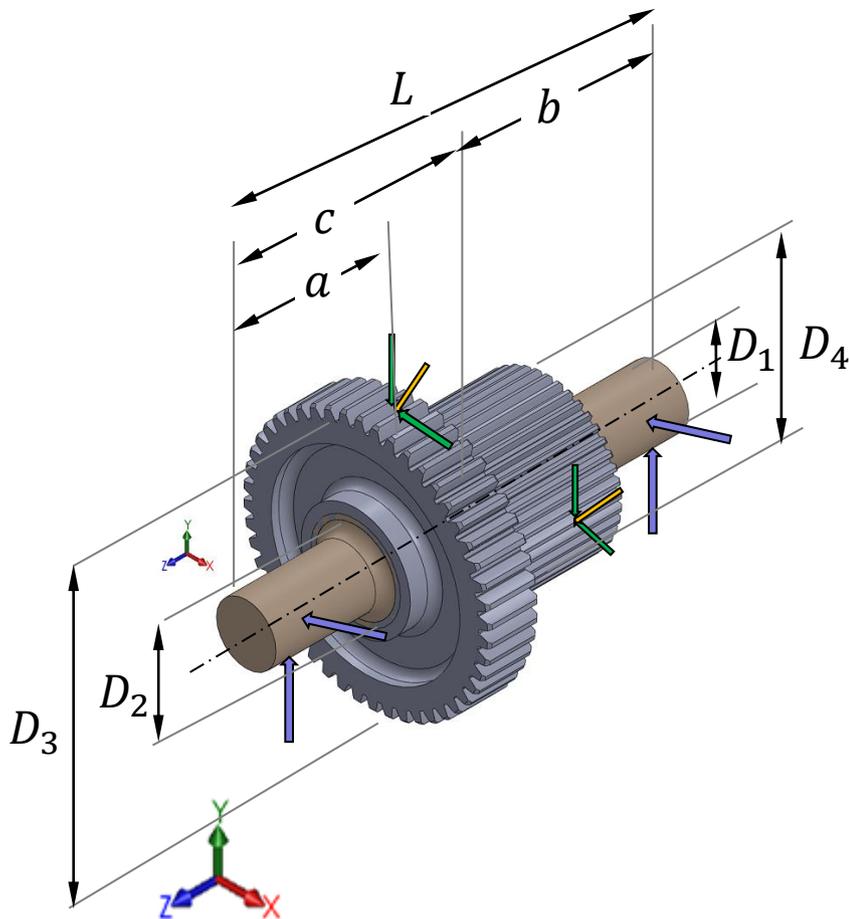


Exemplo 2





## Exemplo 2

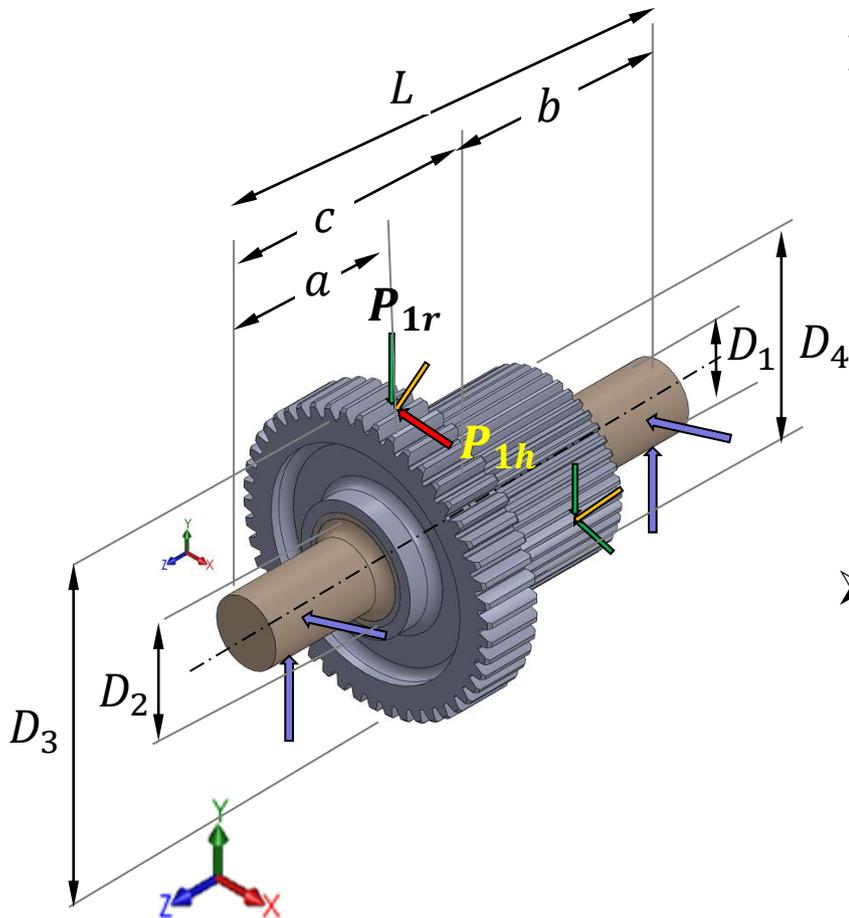


### ➤ Dados:

- $\alpha = 20^\circ$  (Ângulo de engrenamento)
- $D_3 = 400$  mm
- $D_4 = 120$  mm
- $a = 80$  mm
- $b = 120$  mm
- $c = 180$  mm
- $L = 300$  mm
- $M_t = 600$  N.m
- $D_2 = ?$



## Exemplo 2



- Cálculo da força tangencial na engrenagem 1

$$P_{1h} = \frac{M_t}{\left(\frac{D_3}{2}\right)} \quad P_{1h} = \frac{600 \text{ N.m}}{(200 \text{ mm})}$$

$$P_{1h} = 3,000 \text{ N}$$

- Cálculo da força radial na engrenagem 1

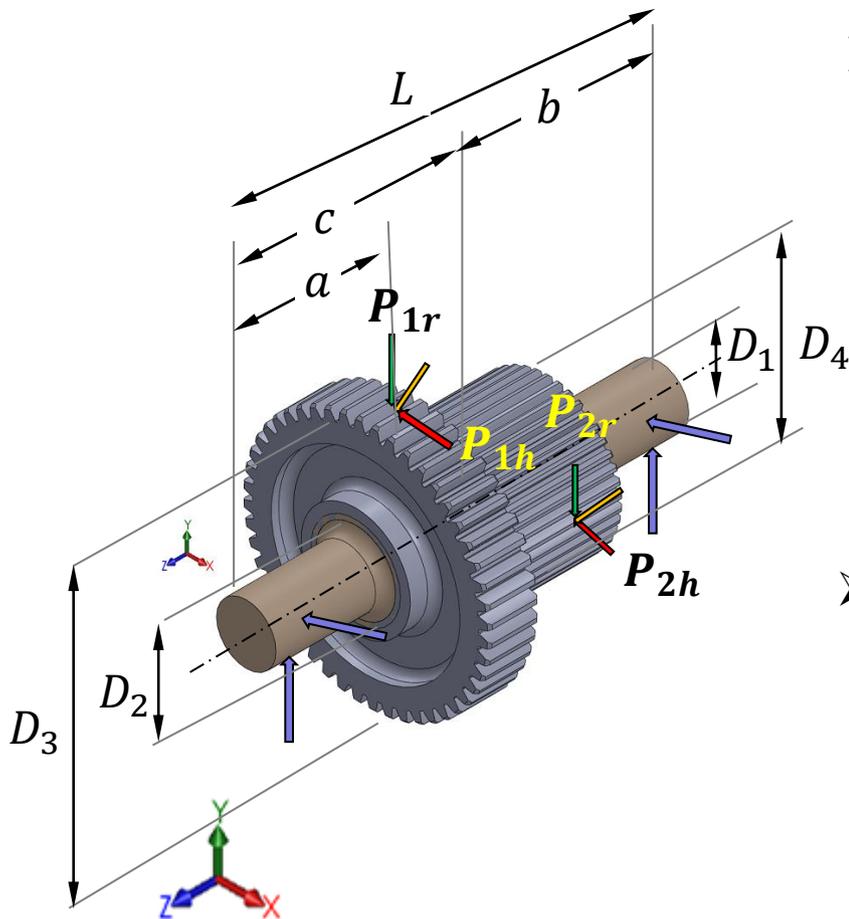
$$P_{1r} = P_{1h} \cdot \tan \alpha$$

$$P_{1r} = 3.000 \tan 20^\circ$$

$$P_{1r} = 1.092 \text{ N}$$



## Exemplo 2



- Cálculo da força tangencial na engrenagem 2

$$P_{2h} = \frac{M_t}{\left(\frac{D_4}{2}\right)} \quad P_{2h} = \frac{600 \text{ Nm}}{(0,060)}$$

$$P_{2h} = 10.000 \text{ N}$$

- Cálculo da força radial na engrenagem 1

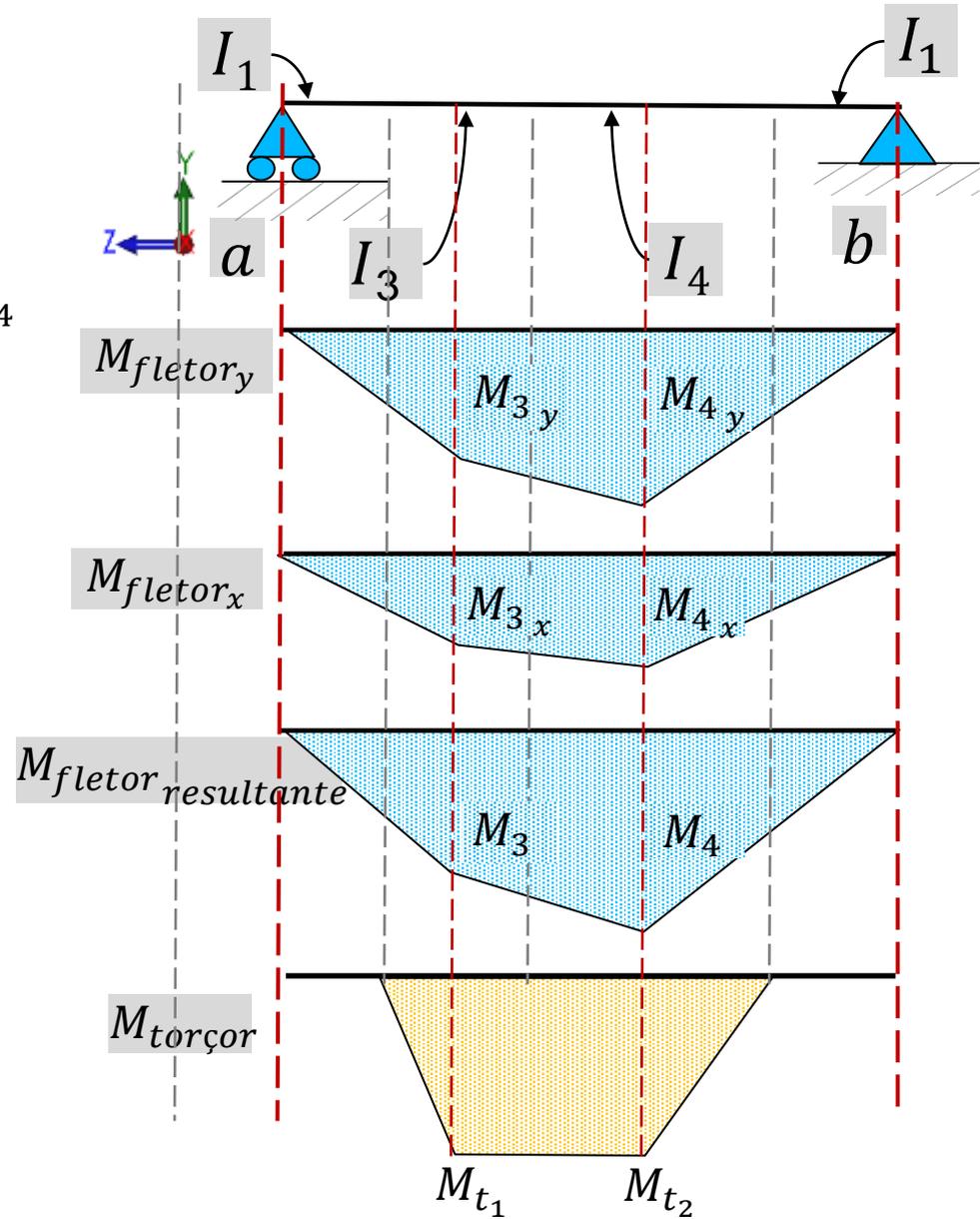
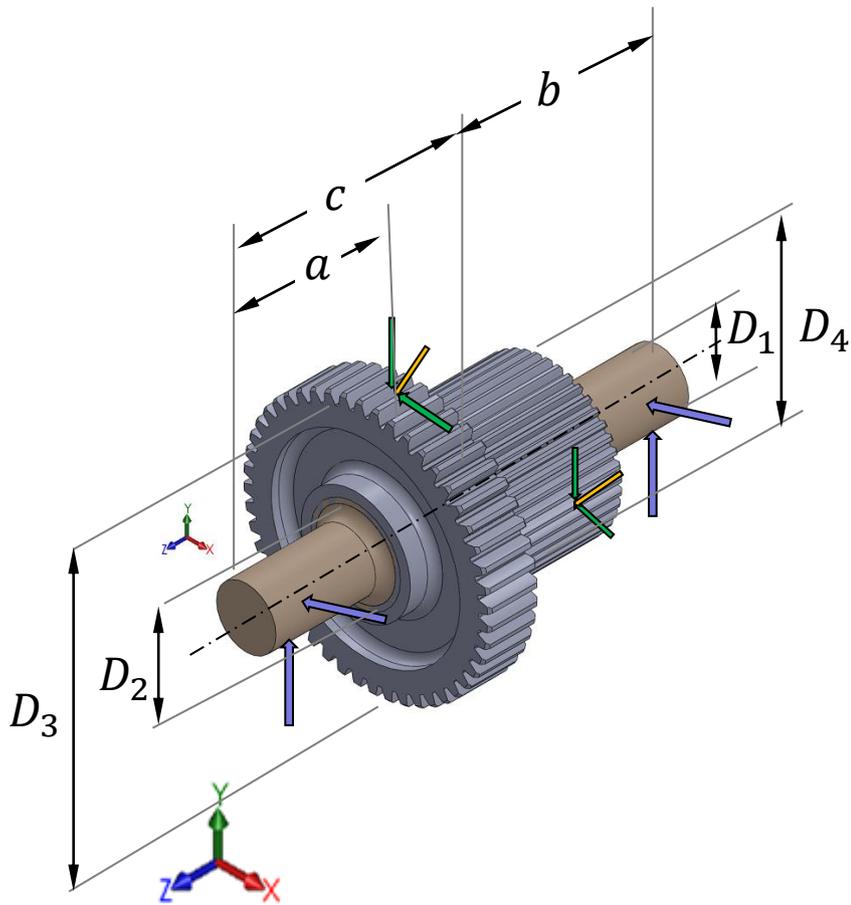
$$P_{2r} = P_{2h} \cdot \tan \alpha$$

$$P_{2r} = 10.000 \tan 20^\circ$$

$$P_{2r} = 3.639,70 \text{ N}$$

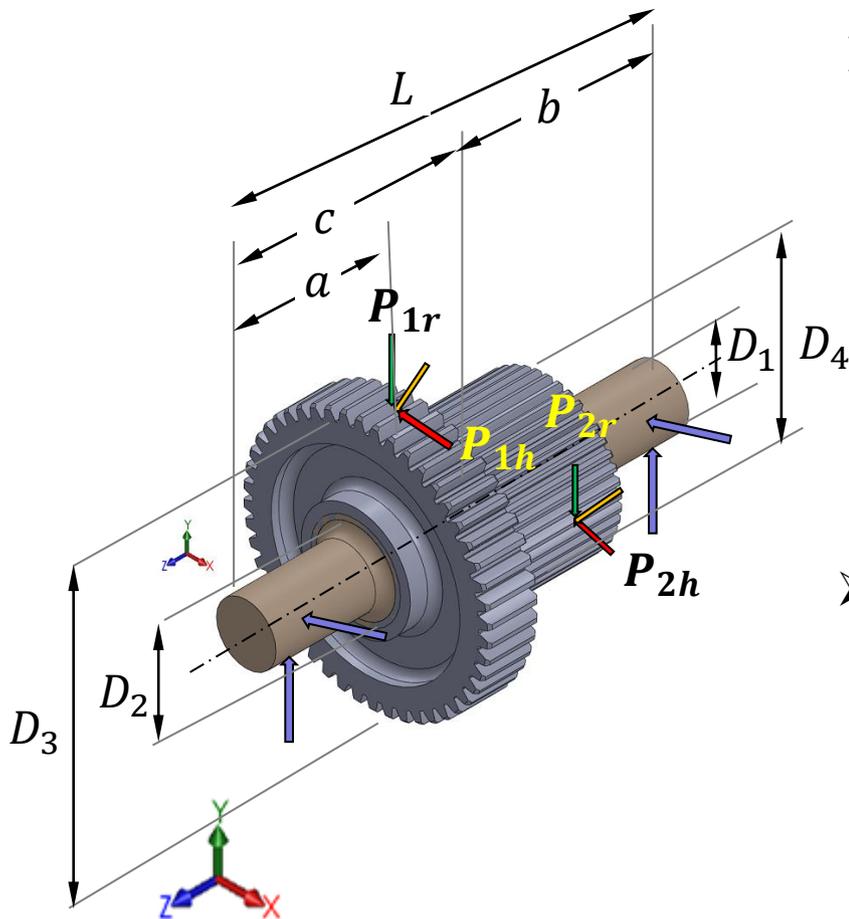


## Exemplo 2





## Exemplo 2



- Cálculo da força tangencial na engrenagem 2

$$P_{2h} = \frac{M_t}{\left(\frac{D_4}{2}\right)} \quad P_{2h} = \frac{600 \text{ Nm}}{(0,060)}$$

$$P_{2h} = 10.000 \text{ N}$$

- Cálculo da força radial na engrenagem 1

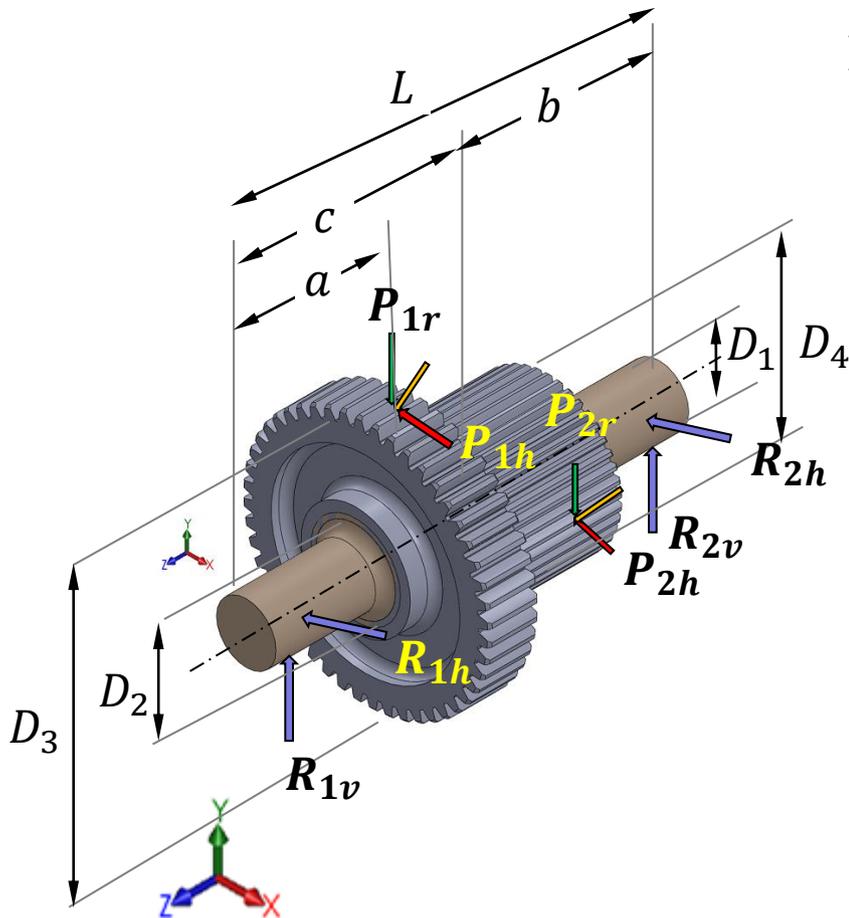
$$P_{2r} = P_{2h} \cdot \tan \alpha$$

$$P_{2r} = 10.000 \tan 20^\circ$$

$$P_{2r} = 3.639,70 \text{ N}$$



## Exemplo 2



➤ Cálculo das reações

$$\sum \vec{F}_x = 0 \quad \sum \vec{F}_y = 0 \quad \sum \vec{F}_z = 0$$

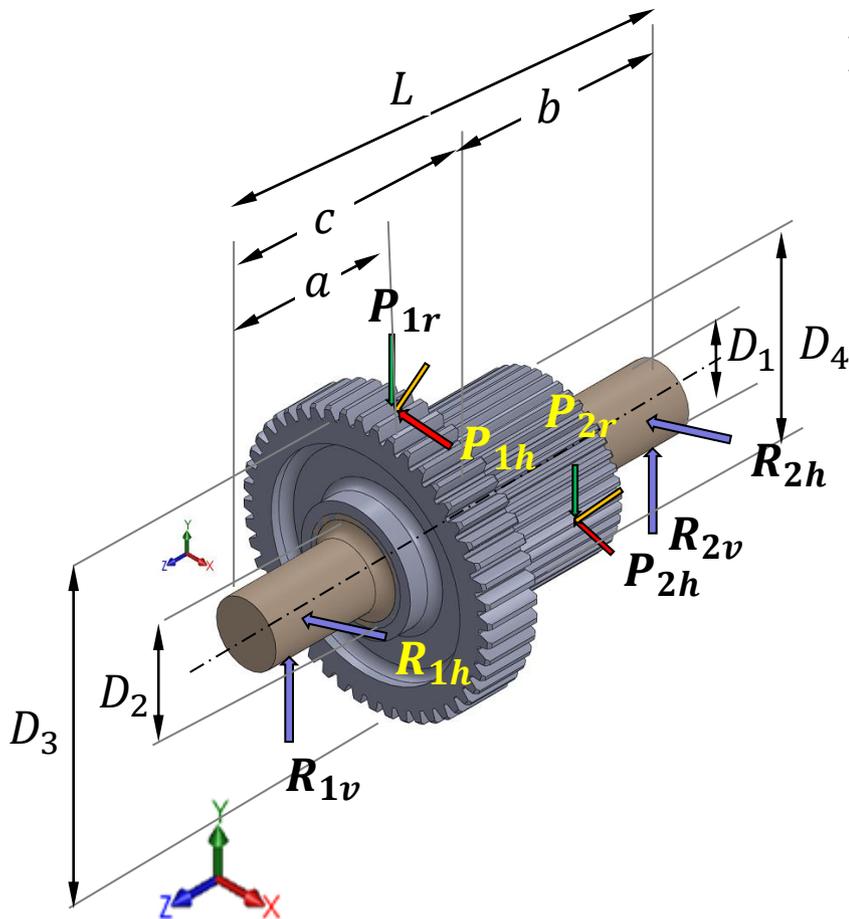
$$R_{1v} + R_{2v} - P_{1r} - P_{2r} = 0$$

$$R_{1h} + R_{2h} + P_{1h} + P_{2h} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} R_{2v} = 6.200N \\ R_{2h} = 2.800N \end{array} \right\} R_2 = 3.000N$$



## Exemplo 2



- Cálculo das reações

$$M_4 = R_2 b$$

$$M_4 = 3.000 * 0,12 = 2950 N$$

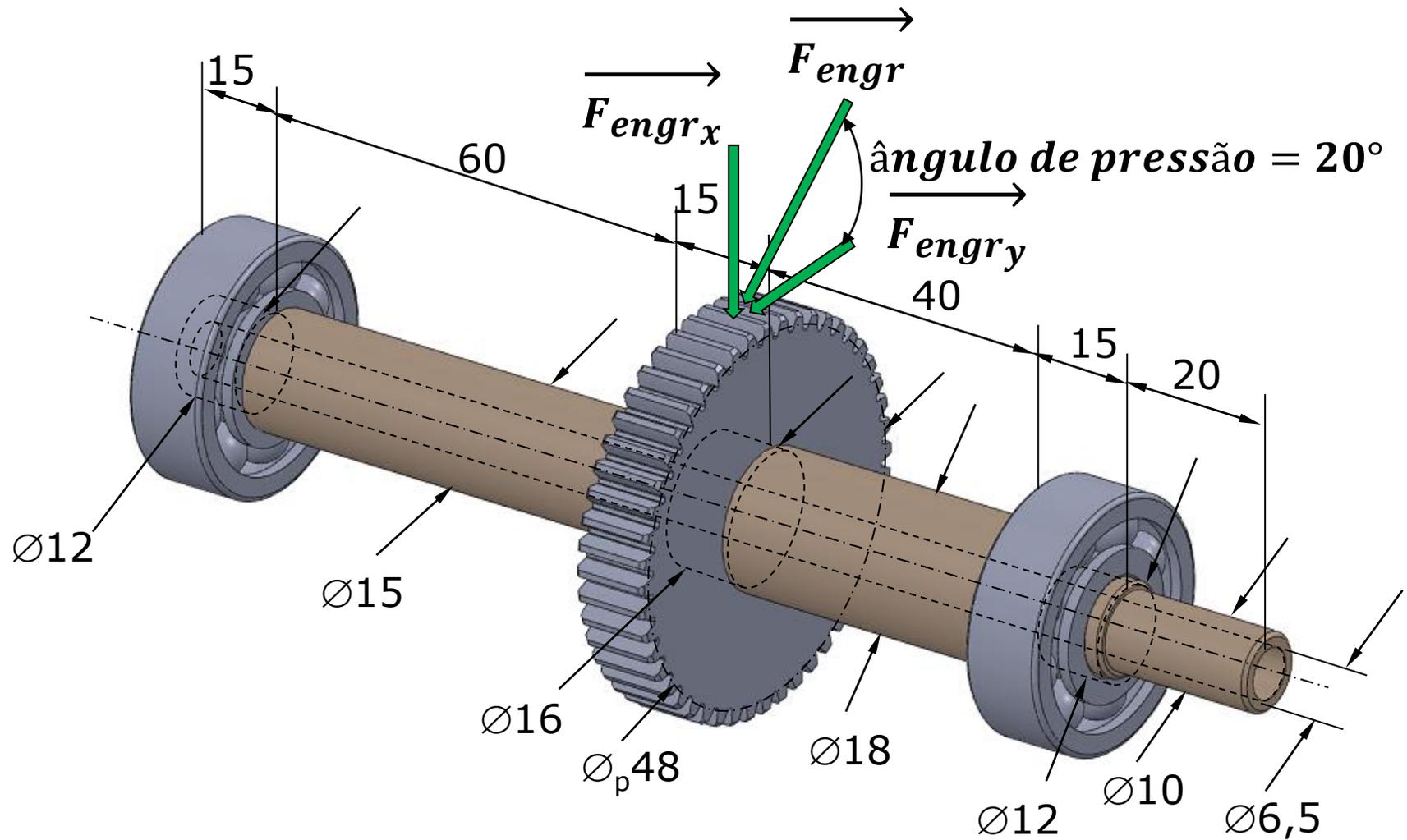
$$M_i = \sqrt{M_2^2 + \left(\frac{a}{2} \cdot M_t\right)^2} = 880 Nm$$

$$r_2 = \frac{\sigma}{\tau} \cong 1,0$$

$$d_2 = 2,17 \sqrt[3]{\frac{M_i}{\sigma_f}} \cong 135 mm$$



## Exercício 1





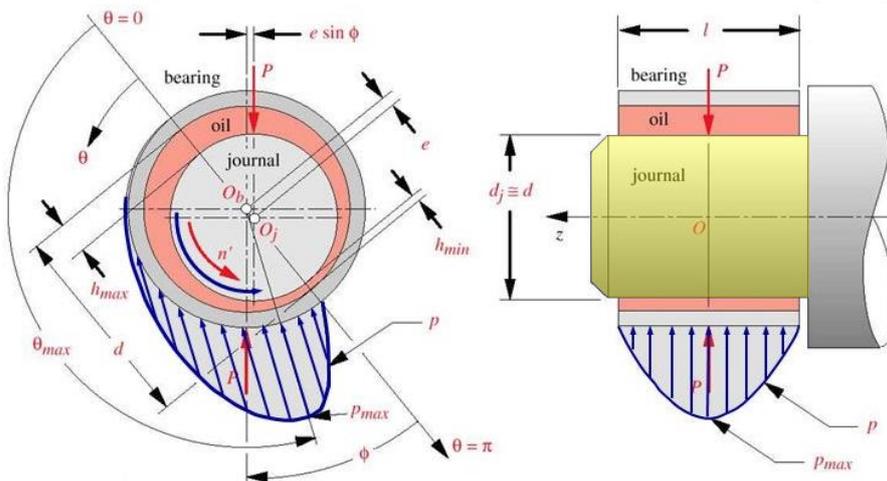
## Materiais para eixos

- A rigidez dos eixos não pode ser controlada pela seleção de materiais
- A rigidez de eixos é função somente das decisões geométricas
- Aços baixo médio carbono tais como o **ANSI ABNT 1020 a 1050** são um bom ponto de partida na seleção de materiais para eixos, principalmente pela relação resistência/custo
- O problema de fadiga pode ser minimizado até certo ponto pela adoção de aços liga mais resistentes
- Aços liga são recomendados para eixos com problemas de flexão
- Aços liga são recomendados para eixos de pequenas dimensões
- **ANSI ABNT 1340-50, 3140-50, 4140, 4340, 5140 e 8650**
- O uso de **aços inoxidáveis** só é recomendado em função do ambiente de trabalho (ex.: Indústria alimentícia, equipamentos médicos odontológicos, equipamentos navais, equipamentos de mineração, indústria química, entre outros)



## Materiais para eixos

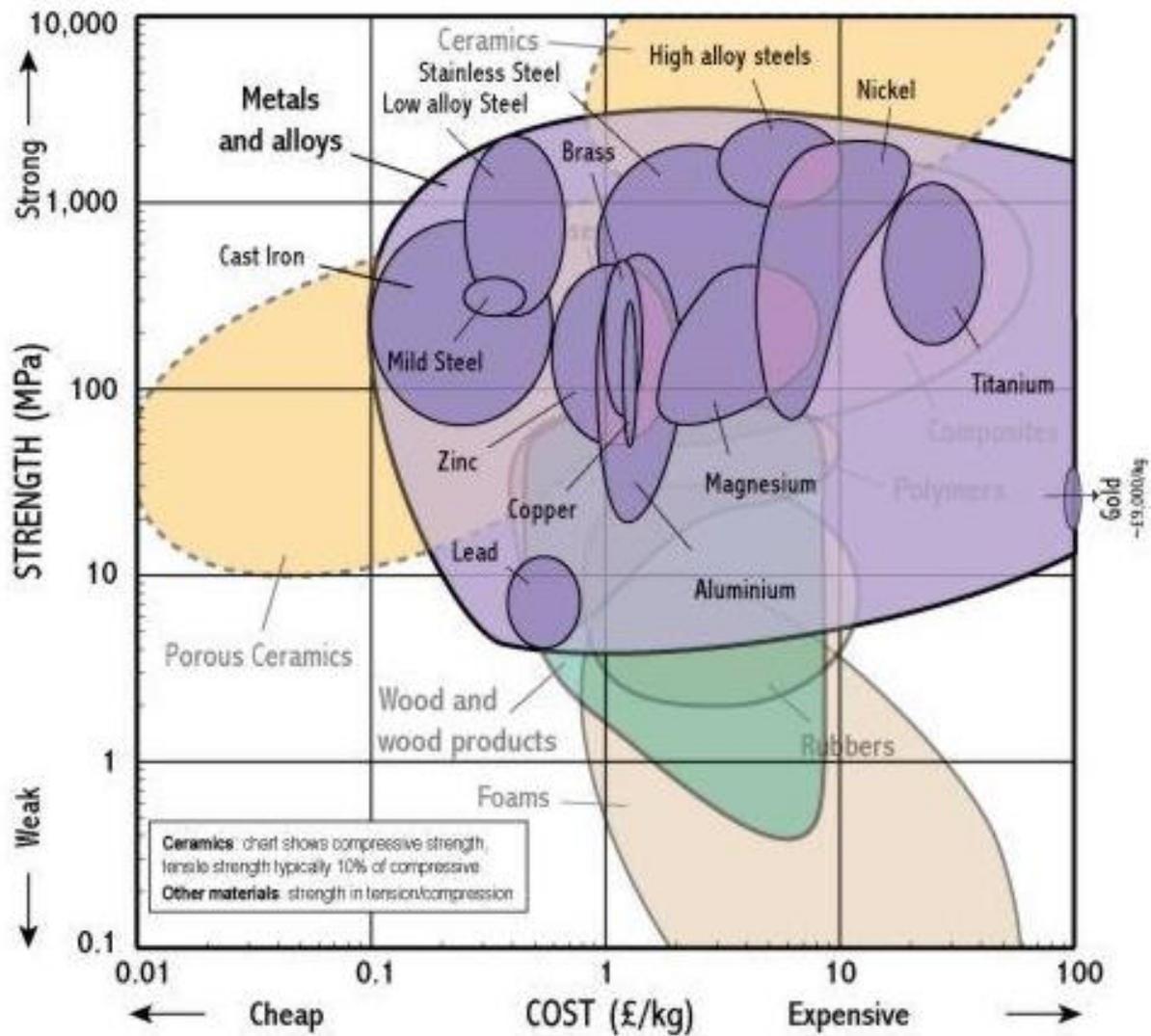
- Em geral nos eixos não são realizados tratamentos de endurecimento superficial (ex.: tempera, nitretação, cementação, outros)
- Esse tipo de tratamento só é recomendado para regiões do eixo que vão atuar como superfícies de suporte (ex.: mancais de escorregamento, hidrodinâmicos e hidrostáticos)
- Objetivo é minimizar o desgaste



- **ANSI ABNT 1020, 4320, 4820 e 8620**



## Materiais para eixos





## fabricação de eixos

- Em geral se recomenda a usinagem das partes de eixos onde haverá montagens.
- Eixos de grande dimensões e eixos forjados é recomendado a usinagem integral para a remoção de tensões residuais da superfície
- Eixos fundidos sujeitos a elevados esforços também se recomenda a usinagem integral para remoção da camada externa
- Eixos que sofreram muita remoção por usinagem ou forjados é recomendada a realização de tratamento térmico para alívio de tensões e aumento da resistência



## escalonamento de eixos

- Não existem regras ou normas para definir o escalonamento de eixos, existem somente algumas recomendações práticas:
  - O escalonamento dos eixos é feito para acomodar os diversos elementos que serão montados (ex.: polias, engrenagens, mancais, outros).
  - Dê preferência em colocar os elementos entre os apoios dos mancais.
  - Evite componentes em balanço.
  - Componentes em balanço são recomendados somente houver a necessidade de trocas constantes, como no caso de polias, correias e correntes.
  - Evite usar mais que dois mancais de apoio.



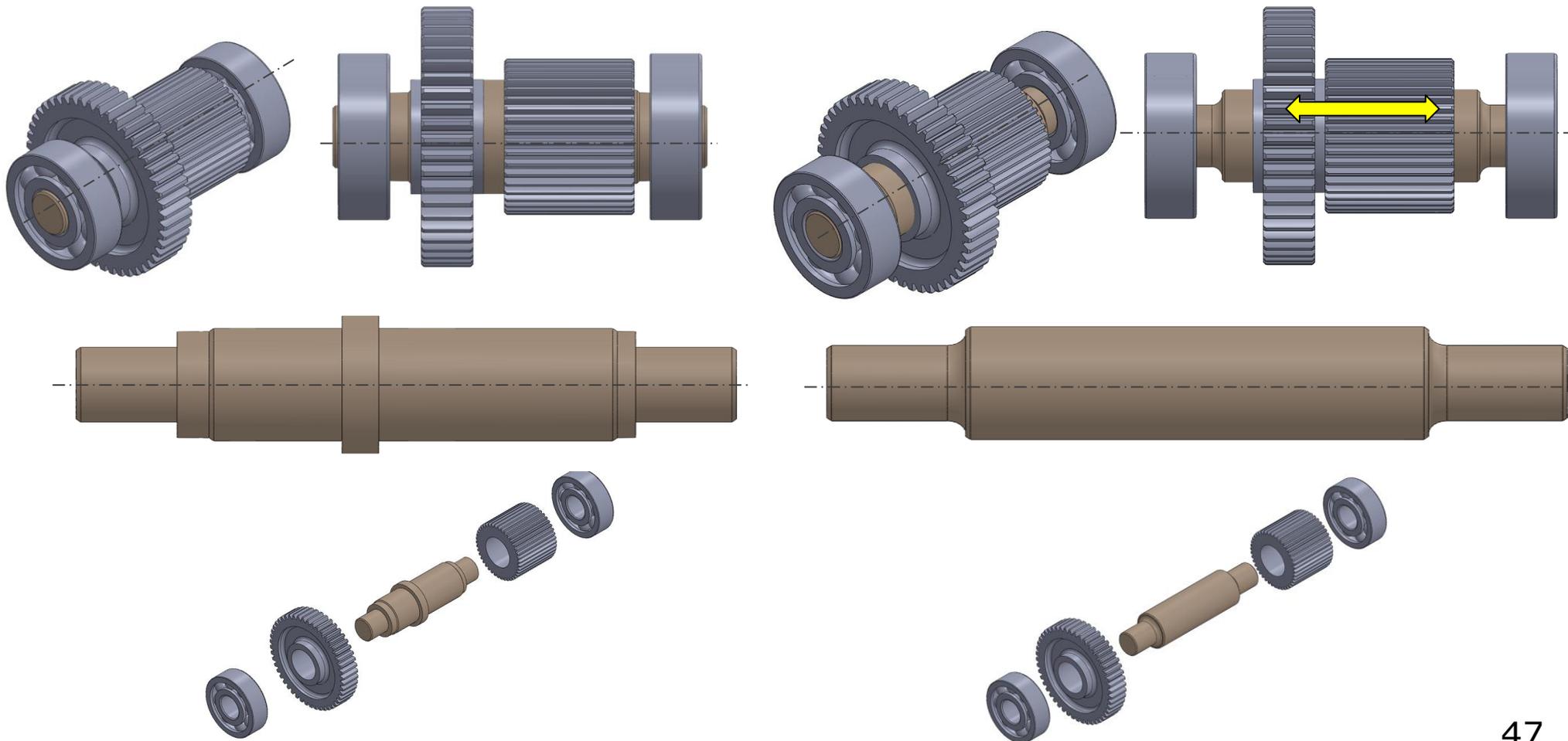
## escalonamento de eixos

- Quanto mais curto o eixo melhor, isto minimiza o problema de flexão
- Sempre deixe algum espaço entre os componentes para facilitar a lubrificação
- Componentes com elevado carregamentos devem ser colocados o mais próximo possível dos mancais, isso ajuda a minimizar o problema de flexão
- Use batentes para permitir uma localização precisa dos componentes
- O uso batentes também permite a redução da flexão e vibrações



## escalonamento de eixos

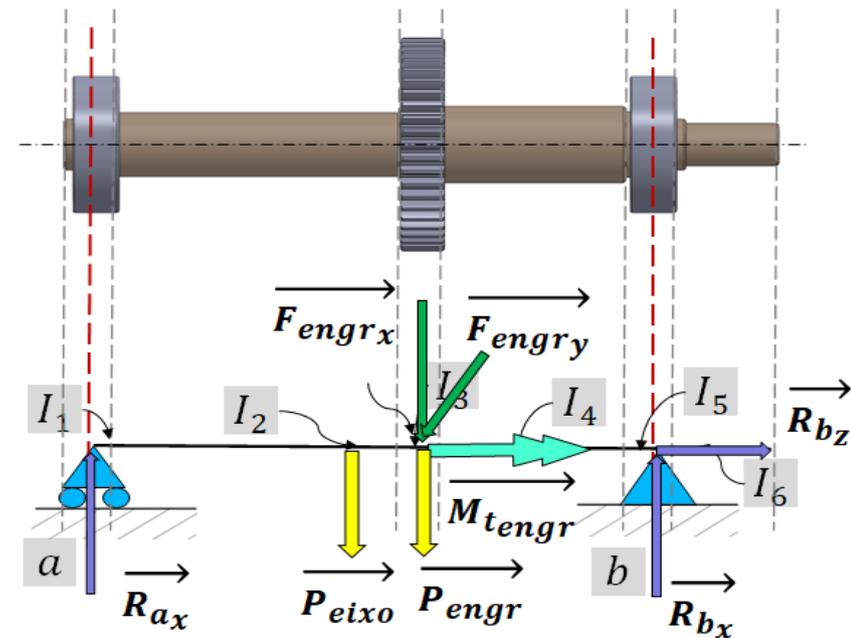
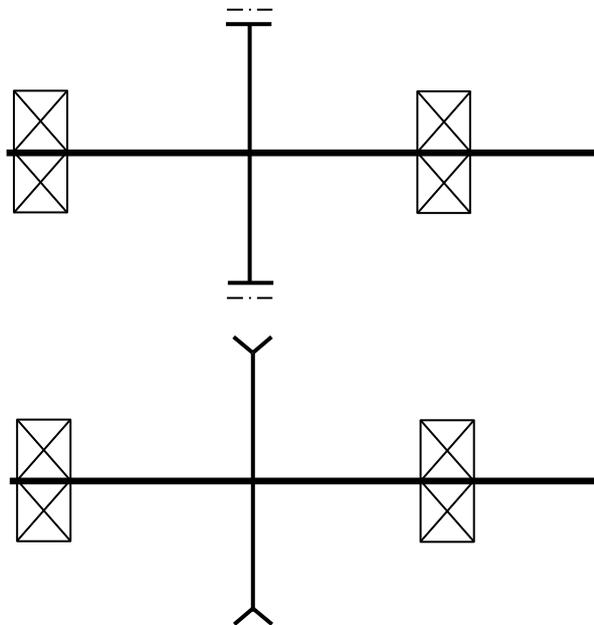
- O uso de batentes é recomendado para garantir o posicionamento correto dos elementos





## escalonamento de eixos

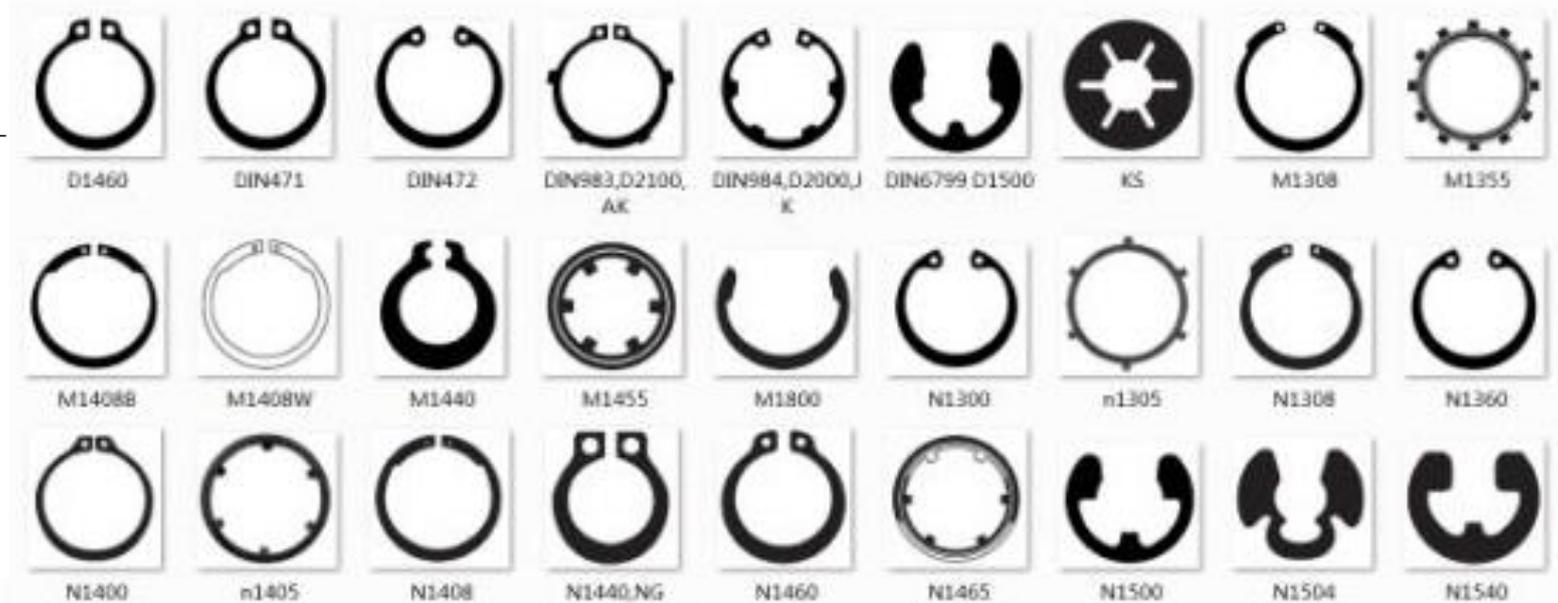
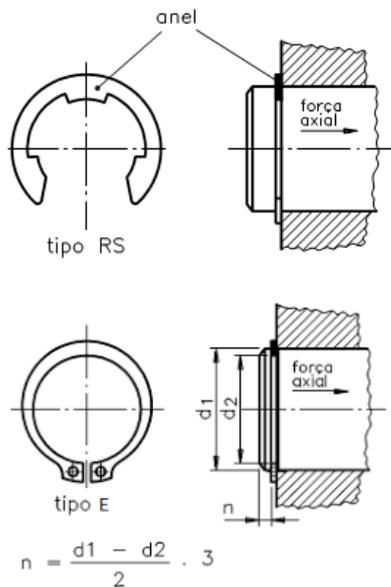
- A disposição prévia dos elementos no eixo é necessária para se fazer o diagrama de corpo livre
- Teste o escalonamento utilizando modelos simples





## recomendações para escalonamento de eixos

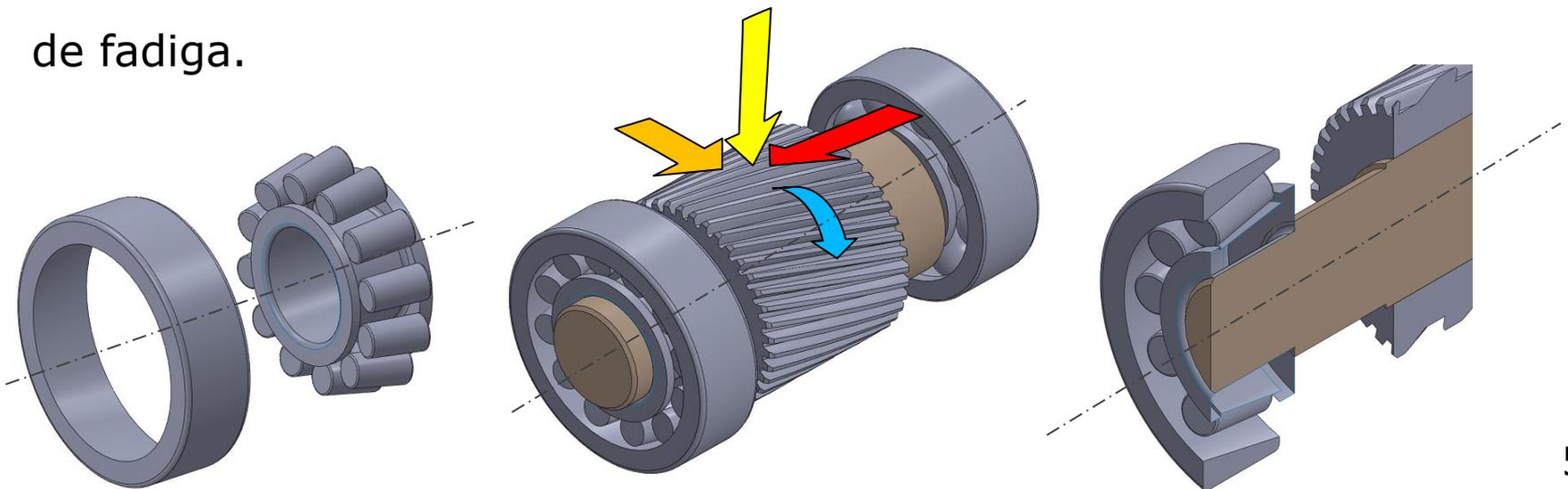
- O uso de anéis de retenção são uma alternativa aos batentes, principalmente em eixos pequenos, com baixos carregamentos e que operem a baixas ou médias velocidades.





## recomendações para escalonamento de eixos

- Carregamentos **axiais** não são comuns em eixos, mas quando ocorrem deve-se prever o uso de uma mancal para absorver esses carregamentos e devia-los para a estrutura
- Tensões axiais em eixos devido as componentes axiais são insignificamente pequenas em comparação as tensões do momento fletor.
- As tensões axiais praticamente não contribuem para o problema de fadiga.





**FIM DA AULA**