Simulado 1 SMA304 - 2023

Questão 1. Considere os polinômios:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 1 + x + 3x^2 + x^3, \\ p_2(x) &= 1 + 2x^2 + x^3, \\ p_3(x) &= 4 + x + 9x^2 + 4x^3, \\ p_4(x) &= 2 + 2x + 8x^2 + 2x^3 \end{aligned}$$

e seja S o subespaço vetorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ gerado por $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Pode-se afirmar que:

( ) Existem dois vetores de S linearmente independentes que geram S.

( ) Existe um $q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tal que $\{q, p_2, p_3, p_4\}$ é LI.

( ) $S = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

( ) Existe um $q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tal que $\{p_1, p_2, p_3, q\}$ é LI.

( ) O conjunto $\{p_1, p_2, p_3\}$ gera S.

( ) Nenhuma das alternativas anteriores.

Questão 2. Considerando o espaço vetorial $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ munido com as operações

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 y_2) \\ a \odot (x, y) &= (ax, y^a), \end{aligned}$$

em que $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ e $a \in \mathbb{R}$, fazemos as seguintes afirmações:

(a) $(1, 4), (1, 2), (3, 16)$ são vetores linearmente dependentes.

(b) $\{(0, 1)\}$ é um conjunto linearmente independente.

Podemos afirmar que:

( ) As afirmações (a) e (b) são verdadeiras.

( ) Somente a afirmação (a) é verdadeira.

( ) Somente a afirmação (b) é verdadeira.

( ) Nenhuma das afirmações é verdadeira.

Questão 3. Considerando $v_1 = (1, 3, 5)$, $v_2 = (2, m, n)$ e $v_3 = (m + n, 2, m - 2)$ vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ (munido com as operações usuais de soma e produto por escalar), fazemos as seguintes afirmações:

(a) v_1 e v_2 são vetores linearmente independentes se, e somente se, $m \neq 6$ ou $n \neq 10$.

(b) v_2 e v_3 são vetores linearmente dependentes se, e somente se, $m = 2$ e $n = 0$.

Podemos afirmar que:

( ) As afirmações (a) e (b) são verdadeiras.

( ) Somente a afirmação (a) é verdadeira.

( ) Somente a afirmação (b) é verdadeira.

( ) Nenhuma das afirmações é verdadeira.

Questão 4. Consideremos as seguintes afirmações:

(a) $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ munido com as operações

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + 2y_2) \\ a \odot (x, y) &= (ax, ay) \end{aligned}$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

(b) $W = \{(x, 2y, 3z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ quando consideramos este último munido com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar.

Podemos afirmar que:

( ) As afirmações (a) e (b) são verdadeiras.

( ) Somente a afirmação (a) é verdadeira.

( ) Somente a afirmação (b) é verdadeira.

( ) Nenhuma das afirmações é verdadeira.

Questão 5. Considere em $\mathbb{R}^3$ as seguintes operações:

$$\begin{gathered} (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3), \\ \alpha \cdot (x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, x_3), \end{gathered}$$

onde (x_1, x_2, x_3), $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

É correto afirmar que:

( ) $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ é um espaço vetorial pois a soma é igual à soma usual em $\mathbb{R}^3$.

( ) $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ não é um espaço vetorial pois $u + (v + w) \neq (u + v) + w$ para algum u, v, $w \in \mathbb{R}^3$.

( ) $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ não é um espaço vetorial pois $\alpha \cdot (\beta \cdot u) \neq (\alpha\beta) \cdot u$ para algum $u \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

( ) $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ não é um espaço vetorial pois $(\alpha + \beta) \cdot u \neq \alpha \cdot u + \beta \cdot u$ para algum $u \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

( ) $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ não é um espaço vetorial pois $\alpha \cdot (u + v) \neq \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ para algum $u, v \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

( ) Nenhuma das alternativas anteriores.

Questão 6. Considerando $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$ vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ (munido com as operações usuais de soma e produto por escalar), fazemos as seguintes afirmações:

(a) $(x, y, 0) \in [v_1, v_2]$ e $(x, y, z) \in [v_1, v_3]$ para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(b) $(x, x, y) \in [v_2, v_3]$ e $(x, y, z) \in [v_1, v_2, v_3]$ para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Podemos afirmar que:

( ) As afirmações (a) e (b) são verdadeiras.

( ) Somente a afirmação (a) é verdadeira.

( ) Somente a afirmação (b) é verdadeira.

( ) Nenhuma das afirmações é verdadeira.

Questão 7. Considere as seguintes afirmações:

(I) Sejam $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a + d = b + c \right\}$ e $T = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} \right]$ subespaços vetoriais do espaço vetorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Então $T \subset S$ e $T \neq S$.

(II) Sejam $A = \{1, \mathrm{sen}^2 t, \cos^2 t, \mathrm{sen} t \cos t\}$ e $B = \{1, \mathrm{sen} 2t, \cos 2t\}$ dois subconjuntos de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Então $[B] \subset [A]$, mas $[A] \neq [B]$.

(III) $(x, y, z, w) \in [\{(1, -1, -2, 1), (-1, 0, 2, 2)\}]$ se, e somente se $2x + z = 0$ e $2x + 3y + w = 0$.

Então

( ) (I) é verdadeira e (II) e (III) são falsas.

( ) (II) é verdadeira e (I) e (III) são falsas.

( ) (III) é verdadeira e (I) e (II) são falsas.

( ) (I) e (II) são verdadeiras e (III) é falsa.

( ) (I) e (III) são verdadeiras e (II) é falsa.

( ) (II) e (III) são verdadeiras e (I) é falsa.

( ) (I), (II) e (III) são verdadeiras.

( ) (I), (II) e (III) são falsas.

Questão 8. Assinale a alternativa correta a respeito do seguinte subconjunto W do espaço vetorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid ab - cd = 0 \right\}.$$

( ) W não é um subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, pois não contém o vetor nulo de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

( ) Existem dois elementos de W cuja soma não pertence a W.

( ) W é um subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e um conjunto de geradores de W é

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

( ) W é um subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e um conjunto de geradores de W é

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

( ) W é um subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e um conjunto de geradores de W é

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

( ) Nenhuma das alternativas anteriores.

Questão 9. Considere as afirmações abaixo. Se a afirmação for verdadeira, prove. Se a afirmação for falsa, dê um contra-exemplo. Assinale, também, a alternativa correta.

(I) O espaço gerado pelo conjunto vazio é o conjunto vazio.

(II) $\mathbb{R}^2$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(III) Se V for um conjunto que contém o vetor nulo e tal que

$$u, v \in V \;\Rightarrow\; u + v \in V,$$

então V é um espaço vetorial.

É correto afirmar que:

( ) Somente (II) e (III) são verdadeiras.

( ) Somente (I) é verdadeira;

( ) Nenhuma afirmação é verdadeira.

( ) Somente (III) é verdadeira.

( ) Somente (II) é verdadeira.

( ) Somente (I) e (II) são verdadeiras.

( ) Somente (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 10. Considere as afirmações abaixo. Se a afirmação for verdadeira, prove. Se a afirmação for falsa, dê um contra-exemplo. Assinale, também, a alternativa correta.

(I) Se U e W são subespaços vetoriais de um espaço vetorial V, então $U \cup W$ é um subespaço vetorial de V.

(II) O conjunto das matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ é um subespaço de $M_2(\mathbb{R})$.

(III) $Z = \{\, (x_1\,, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;;\; x_1 \text{ é irracional}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

É correto afirmar que:

( ) Somente (II) e (III) são verdadeiras.

( ) Somente (I) é verdadeira;

( ) Nenhuma afirmação é verdadeira.

( ) Somente (III) é verdadeira.

( ) Somente (II) é verdadeira.

( ) Somente (I) e (II) são verdadeiras.

( ) Somente (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 11. No espaço vetorial V das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, considere

$$\begin{aligned} S_1 &= \{f \in V\colon f(2) = f(5) + 1\} \\ S_2 &= \{f \in V\colon f(-3) + f(4) = 0\} \\ S_3 &= \{f \in V\colon f(2) = f(-2) + f(1)\}. \end{aligned}$$

Então são subespaços vetoriais de V:

( ) S_1, S_2 e S_3;

( ) S_2 e S_3 somente;

( ) S_3 somente;

( ) S_1 e S_2 somente;

( ) S_2 somente.

Questão 12. Em cada um dos itens abaixo, determine os subespaços $U \cap W$ e $U + W$ do espaço vetorial real $V = \mathbb{R}^3$ com as operações usuais.

(I) $U = [(0\,,1\,,0)\,,(1\,,1\,,1)], W = [(2\,,0\,,0)\,,(1\,,0\,,1)]$.

(II) $U = \big\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x - z = 0\big\}, W = [(1\,,3\,,0)\,,(0\,,-2\,,1)]$.

Assinale a alternativa incorreta:

( ) No item (I), $U + W = [(0\,,1\,,0)\,,(2\,,0\,,0)\,,(1\,,0\,,1)]$.

( ) No item (II), $U + W = [(1\,,0\,,-1)\,,(1\,,3\,,0)\,,(0\,,-2\,,1)]$.

( ) No item (I), $U \cap W = [(1, 0, 1)]$.

( ) No item (II), $U \cap W = [(1, 5, 1)]$.

Questão 13. Consideremos os subespaços W_1 e W_2 do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ (munido com as operações usuais de soma e produto por escalar):

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x + y, y, 0, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ W_2 &= \{(z + w, z + w, z + w, w) \mid z, w \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Podemos afirmar que:

( ) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$ e essa soma de subespaços é direta.

( ) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$ e essa soma de subespaços não é direta.

( ) $W_1 + W_2 = \{(x+y, x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ e essa soma de subespaços é direta.

( ) $W_1 + W_2 = \{(x+y, x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ e essa soma de subespaços não é direta.

Questão 14. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^5$:

$$U = \{(x, y, z, w, t) \in \mathbb{R}^5 \mid x + y + z + w + t = 0\},$$
$$W = \{(x, y, z, w, t) \in \mathbb{R}^5 \mid y + w + t = 0 \text{ e } y + z + w + t = 0\}.$$

Então

( ) $U \cap W = [\{(0, -1, 0, 1, 0), (0, -2, 0, 1, 1), (0, -1, 0, 0, 1)\}]$.

( ) $U \cap W = [\{(0, -1, 0, 1, 0), (0, -2, 0, 1, -1), (0, 1, 0, 0, 1)\}]$.

( ) $U \cap W = [\{(0, -1, 0, 1, 0)\}]$.

( ) $U \cap W = [\{(0, -1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 0, -1)\}]$.

( ) $U \cap W = [\{(0, -1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 0, 1)\}]$.

( ) Nenhuma das alternativas anteriores.

Questão 15. Considere os seguintes conjuntos:

$F = \{(1, 1, 0, 3), (0, 0, 1, 0)\}$

$G = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \colon x + y - 2w = 0 \text{ e } y + z + w = 0\}$

$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \colon x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$

$J = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \colon x - y - z + t = 0\}$.

$U = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \colon A^t = A\}$.

$W = \{B \in M_n(\mathbb{R}) \colon B^t = -B\}$.

$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = 0\}$.

$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon y = 0\}$.

Assinale a alternativa **CORRETA**:

( ) $F + G$ é soma direta.

( ) $H + J$ é soma direta.

( ) $U + W$ não é soma direta.

( ) $K + B$ é soma direta.

( ) Nenhuma das demais alternativas está correta.