UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos

ZAB1111 – Estatística Básica

Aula 8 – PROBABILIDADE (2)

Variáveis aleatórias discretas

Material preparado pelo Prof. Dr. César Gonçalves de Lima – FZEA/USP

5. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Os recursos disponíveis para o estudo e análise das variáveis quantitativas são mais ricos e numerosos. Inicialmente, vamos estudar algumas características importantes de uma $v.a.$ discreta.

Definição 5.3. Dada uma variável aleatória discreta X, assumindo os valores $x_1, \ldots, x_n$, com as respectivas probabilidades $p_1, \ldots, p_n$, a tabela formada pelos valores da v.a. X e suas respectivas probabilidades é chamada **distribuição de probabilidades da v.a. X**:

x_i	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

Note que numa distribuição de probabilidades $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Definição 5.4. Dada uma variável aleatória discreta X, assumindo os valores $x_1, \dots, x_n$, com as respectivas probabilidades $p_1, \dots, p_n$, chamamos de <u>média</u> ou <u>esperança matemática</u> da v.a. X, o valor numérico, μ, calculado por:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(\mathrm{X} = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \mu$$

Chamamos de <u>variância</u> da v.a. X o valor calculado pela fórmula:

$$var(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 \, p_i = \sigma^2$$

A <u>variância</u> (σ^2) também pode ser calculada como:

$$var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2$$

em que

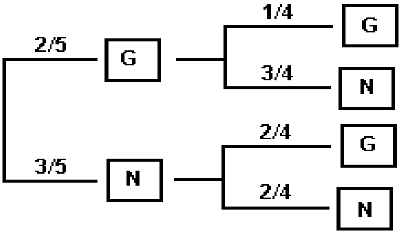
$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(\mathrm{X} = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, p_i$$

O <u>desvio padrão</u> da v.a. X é calculado como a raiz quadrada da variância, ou seja:

$$DP(\mathrm{X}) = \sqrt{var(X)} = \sigma$$

Exemplo 5.1. Em um piquete com dois bezerros Gir (G) e três Nelores (N) foram sorteados <u>sem reposição</u>, dois animais para serem submetidos a um tratamento com carrapaticida.

- Espaço amostral é $S = \{GG, GN, NG, NN\}$
- Variável aleatória: $X =$ "número se bezerros Gir na amostra"



Evento	Probabilidade
$G \cap G$	$(2/5)(1/4) = 1/10$
$G \cap N$	$(2/5)(3/4) = 3/10$
$N \cap G$	$(3/5)(2/4) = 3/10$
$N \cap N$	$(3/5)(2/4) = 3/10$

A distribuição de probabilidades de X: "número se bezerros Gir na amostra" fica:

x	0	1	2
$P(X = x)$	0,3	0,6	0,1

Neste caso:

- $E(X) = (0)(3/10)+(1)(6/10)+(2)(1/10) = 8/10 = 0{,}8$ bezerros
- $E(X^2) = (0^2)(3/10) + (1^2)(6/10) + (2^2)(1/10) = 1{,}0$
- $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1{,}0 - (0{,}8)^2 = 0{,}36$ bezerros^2
- $DP(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$ bezerros.

Exemplo 5.2 [MAGALHÃES, M.A. e LIMA, A.C.P., 2008] Na construção de certo prédio, as fundações devem atingir 15 metros de profundidade e, para cada 5 metros de estacas colocadas, o operador anota se houve alteração no ritmo de perfuração previamente estabelecido. Essa alteração resulta de mudanças (para mais ou para menos) na resistência do subsolo e quando ocorrem, atingem a perfuração de todas as estacas. Se ocorrer alguma alteração aos 5 ou a 10 metros de profundidade, serão necessárias medidas corretivas, que encarecerão a obra.

Com base em avaliações geológicas feitas anteriormente no terreno admite-se que a probabilidade de ocorrência de alterações é constante e igual a 0,10 para cada 5 metros.

O custo básico inicial da obra é de 100 UPC (unidade padrão de construção) e será acrescido de $50k$, em que k representa o número de alterações observadas.

Admitindo que as alterações na perfuração ocorrem de forma independente entre cada um dos intervalos de 5 metros, pergunta-se:

- Como se comporta a variável "<u>custo final da fundação</u>"?
- Qual é o custo esperado da fundação?

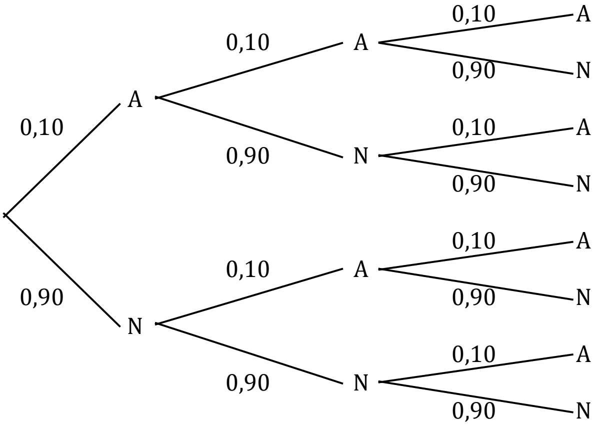
Resolução: Vamos trabalhar com 2 eventos:

A: "ocorrência de alteração em um intervalo de 5 metros"

N: "não ocorrência de alteração",

Note que N é o evento complementar de A, ou seja, $N = A^c$. Como $P(A) = 0{,}10 \Rightarrow P(N) = 1 - P(A) = 0{,}90$.

O problema envolve o estudo de ocorrência de alteração em três etapas (início, 5 m e 10 m) $\Rightarrow$ diagrama de árvore de probabilidades.



Evento	Probabilidade
AAA	$0{,}10^3 = 0{,}001$
AAN	$0{,}10^2 \times 0{,}90 = 0{,}009$
ANA	$0{,}10^2 \times 0{,}90 = 0{,}009$
ANN	$0{,}10 \times 0{,}90^2 = 0{,}081$
NAA	$0{,}10^2 \times 0{,}90 = 0{,}009$
NAN	$0{,}10 \times 0{,}90^2 = 0{,}081$
NNA	$0{,}10 \times 0{,}90^2 = 0{,}081$
NNN	$0{,}90^3 = 0{,}729$

Resumindo, temos:

Número de alterações	0	1	2	3
Custo	100	150	200	250
Probabilidade	0,729	0,243	0,027	0,001

A distribuição de probabilidades da variável $C =$ "custo final da obra de fundação" pode ser apresentada como:

c_i	100	150	200	250
$P(C = c_i)$	0,729	0,243	0,027	0,001

O custo esperado (custo médio) da obra de fundação é igual a:

$$E(C) = \sum_i c_i P(C = c_i) = 100(0{,}729) + \ldots + 250(0{,}001) = 115 \text{ UPC´s}$$

Esse valor pode ser útil na elaboração de futuros orçamentos.

5.2. ALGUMAS PROPRIEDADES DA ESPERANÇA MATEMÁTICA

a) Se somarmos uma constante (k) a todos os valores da v.a. X, sua média fica aumentada pela constante, mas a variância e o desvio padrão não serão alterados.

$$i)\ E(X+k) = E(X) + k \qquad ii)\ var(k+X) = var(X)$$

$$iii)\ DP(k+X) = DP(X)$$

b) Se multiplicarmos por uma constante (k) todos os valores da v.a. X, sua média e seu desvio padrão ficarão multiplicados pela constante e sua variância, pelo quadrado da constante.

$$iv)\ E(kX) = kE(X) \qquad v)\ var(kX) = k^2 var(X)$$

$$vi)\ DP(kX) = k\ DP(X)$$

EXERCÍCIOS

1) Sejam A e B dois eventos em um espaço amostral, com $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = p$, $P(A \cup B) = 0{,}5$ e $P(A \cap B) = 0{,}1$. Determine o valor de p.

2) Uma moeda é viciada de modo que a probabilidade de sair cara é 4 vezes maior que a de sair coroa. Para dois lançamentos independentes dessa moeda, determinar:

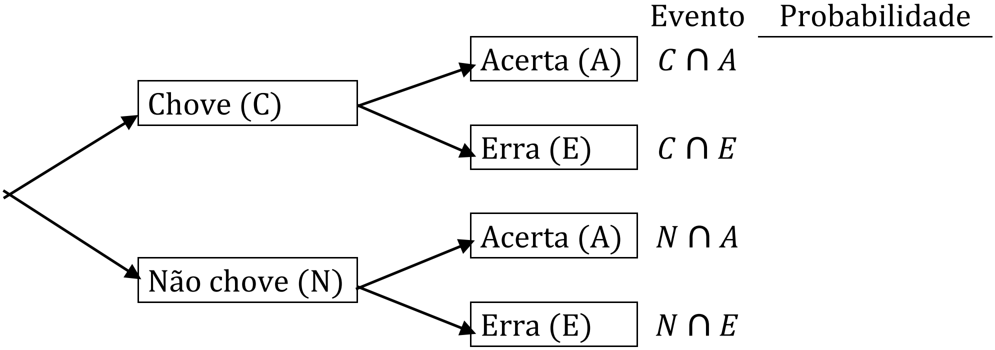
a) O espaço amostral do experimento.

b) A probabilidade de sair somente uma cara nos dois lançamentos.

c) A probabilidade de sair pelo menos uma cara nos dois lançamentos.

d) A probabilidade de sair dois resultados iguais nos dois lançamentos.

3) Em uma região, a probabilidade de chuva em um dia qualquer de primavera é 0,10. Um meteorologista da rádio local acerta suas previsões em 80% dos dias em que chove e em 90% dos dias em que não chove. *Dica*: diagrama de árvore.



Pede-se:

a) Qual é a probabilidade de o meteorologista acertar uma previsão em um dia qualquer de primavera? E de errar?

b) Qual é a probabilidade de ter sido um dia de chuva sabendo-se que a previsão feita pelo meteorologista se confirmou?

4) Historicamente sabe-se que um grande time paulista tem probabilidade 0,55 de vitória em jogos do segundo turno do Campeonato Brasileiro realizados aos sábados. Se este time atuar 4 vezes aos sábados com a mesma escalação. Pede-se:

a) A distribuição de probabilidades da v.a. V: “número de vitórias aos sábados”. Calcular $E(V)$ e $DP(V)$.

b) Calcule a probabilidade de que o time vença: i) todas as partidas; ii) mais de duas partidas e iii) no máximo uma partida.