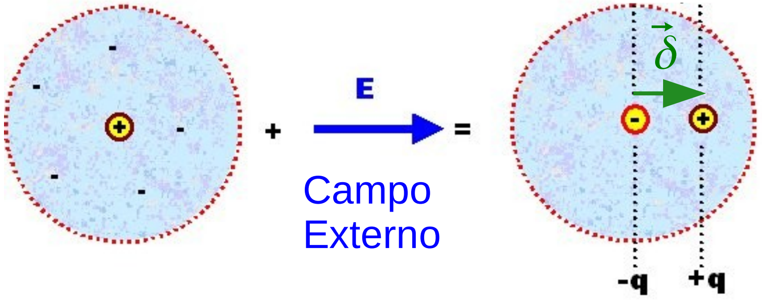
Física IV (IF 2023)
Aula 16

- Objetivos de aprendizagem:
  - Explicar, em linhas gerais, o que acontece em nível microscópico com um dielétrico imerso em campo elétrico
  - Definir o vetor Polarização Elétrica
  - Obter a densidade superficial de carga de polarização elétrica de um material polarizado
  - Obter a capacitância de um capacitor com dielétrico
  - Descrever um modelo para a formação da densidade superficial de carga de polarização
  - Definir a constante dielétrica e a susceptibilidade elétrica
  - Obter o campo elétrico médio no interior de um dielétrico em um campo externo
  - Obter a relação entre a a constante dielétrica e a susceptibilidade elétrica
  - Obter a relação entre o divergente do vetor polarização e a carga de polarização
  - Explicitar as condições de contorno nas interfaces que contém densidade de carga superficial

Molécula imersa em campo elétrico

Molécula apolar

Polarização induzida pelo campo
(“polarização eletrônica”)



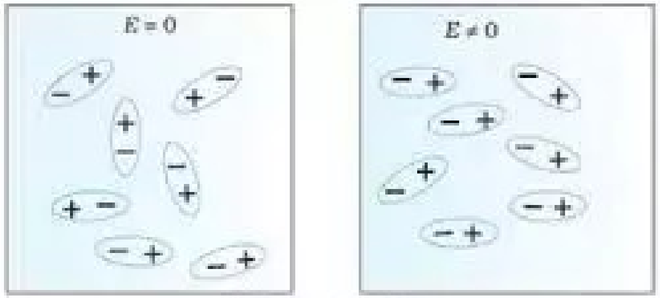
Momento de dipolo elétrico

$$\vec{p} = q\,\vec{\delta}$$

- Ordem de grandeza do campo elétrico microscópico do próton sobre o elétron no átomo de H: 60 GV/m
- Campo externo macroscópico “intenso”: 6 MV/m (10 mil vezes menor)
- Acelerador Pelletron: Gás SF_6
  Campo máximo: ~1 MV/m

Moléculas polares

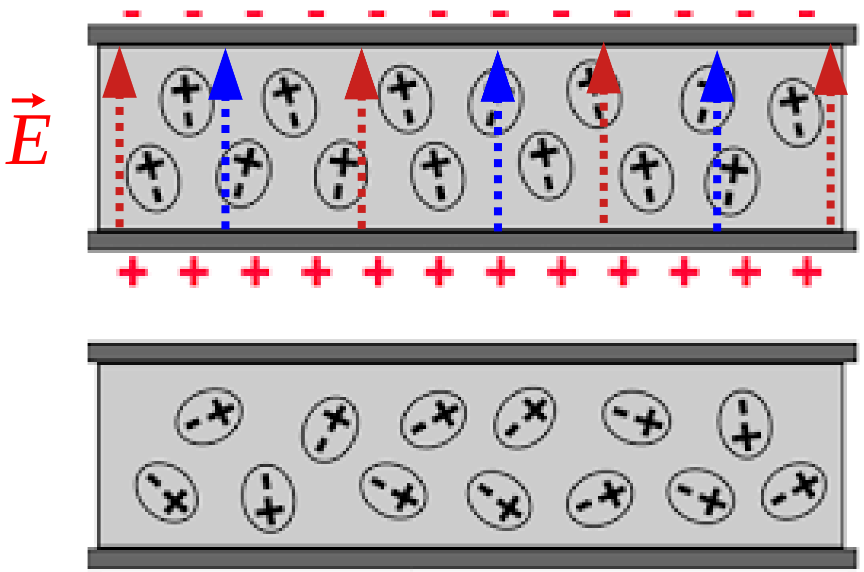
Orientação induzida pelo campo



(b) Polar molecules

MATERIAL	RIGIDEZ DIELÉTRICA (V/m)
Ar	3×10^6
Nylon	14×10^6
Vidro	14×10^6
Óleo de silicone	15×10^6
Teflon	60×10^6

Dielétrico em campo uniforme e vetor polarização



$$\vec{P} \equiv \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \chi\,\varepsilon_0\,\vec{E}$$

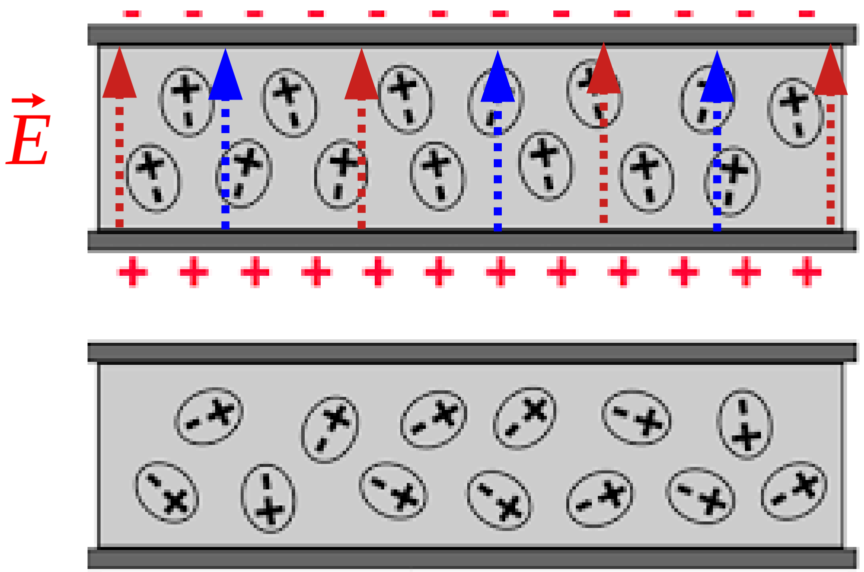
Vetor polarização elétrica
Momento de dipolo elétrico por unidade de volume

χ Susceptibilidade elétrica do meio

Obs.: Meio linear: Susceptibilidade elétrica constante

$\vec{E}$ Campo no interior do capacitor (com dielétrico)

Dielétrico em campo uniforme e vetor polarização



$$\vec{P} \equiv \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$$

Vetor polarização elétrica
Momento de dipolo elétrico por unidade de volume

χ Susceptibilidade elétrica do meio

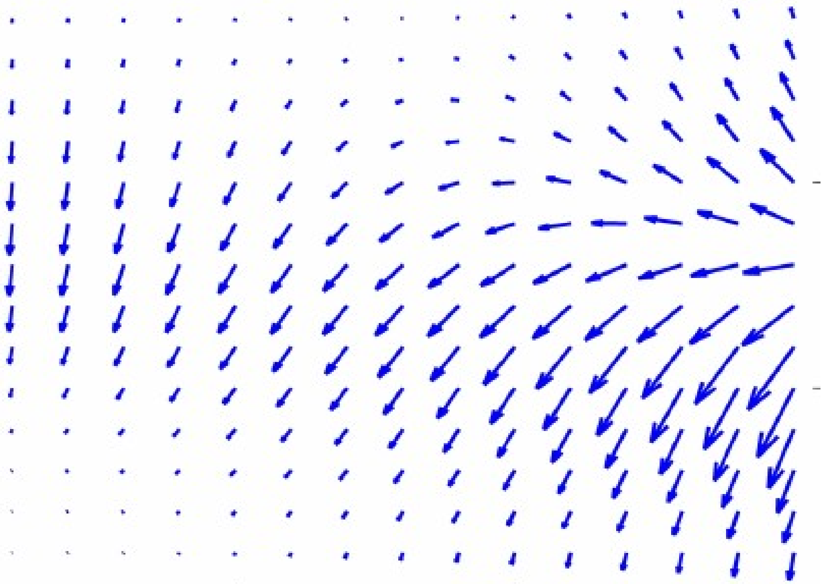
Obs.: Meio linear: Susceptibilidade elétrica constante

Médio, ou “macroscópico”

$\vec{E}$ Campo no interior do capacitor (com dielétrico)

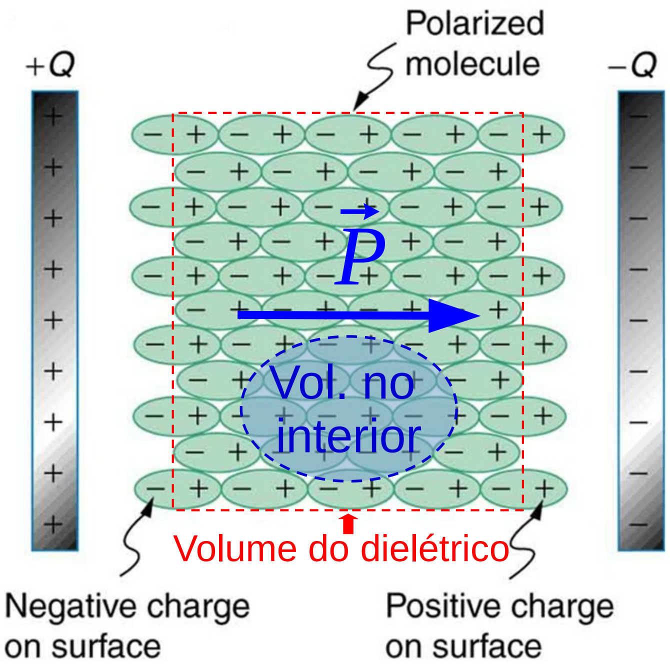
Polarização em campo não uniforme

- Vetor polarização dá a densidade de momento de dipolo <u>local</u>
- Paralelo ao campo elétrico local



$$\vec{P}(x, y, z)$$

Cargas na superfície de dielétrico polarizado



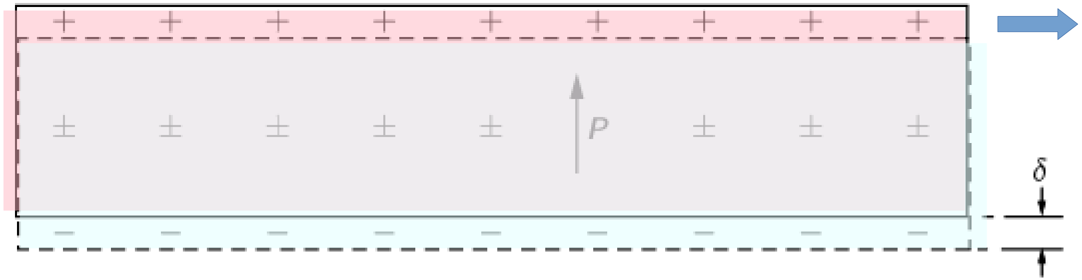
(a)

- No **interior** do dielétrico com polarização <u>uniforme</u>, um volume “qualquer” tem carga zero.
- O volume “qualquer” tem que ser: grande o suficiente para conter muitos dipolos (moléculas), e não cruzar a superfície do dielétrico
- Nas superfícies do dielétrico perpendiculares à polarização haverá predominância de cargas de um dado sinal

Modelo para formação da carga superficial

- Deslocamento igual para todo o conjunto de cargas positivas com relação às negativas

A (área da seção)



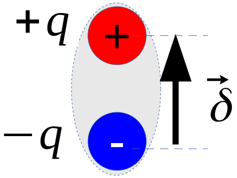
(deslocamento)

Volume deslocado

$$q_{pol} = N\, q\, V = N\, q\, A\, \delta$$

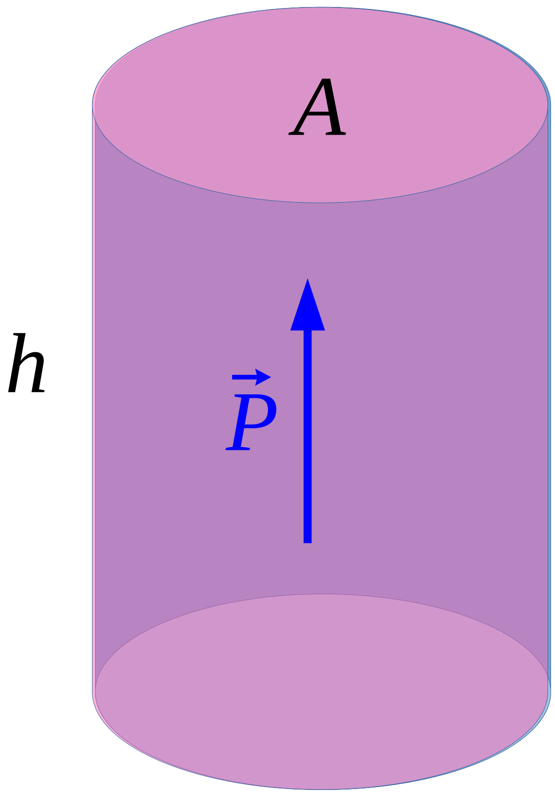
Densidade de moléculas (dipolos)

Carga de cada dipolo molecular



$$\sigma_{pol} = \frac{q_{pol}}{A} = N\, q\, \delta = N\, p = P$$

Amostra macroscópica com polarização uniforme



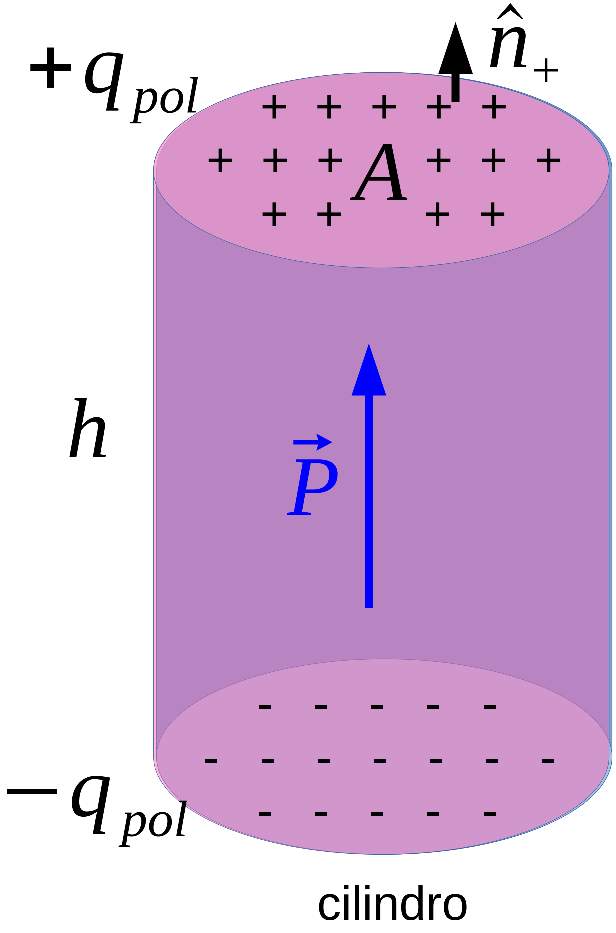
cilindro

Momento de dipolo total da amostra:

$$\vec{p}_{tot} = \sum_{N_{moléc}} \vec{p}_i = \vec{P}\, V = \vec{P}\, A\, h$$

- No interior do volume do dielétrico, a densidade de carga elétrica é ~ 0 (matéria neutra)
- Nas superfícies planas (perpendiculares ao vetor P), a tendência é aparecer mais cargas de uma polaridade ($+q_{pol}$ em cima e -q_{pol} embaixo).

Amostra macroscópica com polarização uniforme



Momento de dipolo total da amostra:

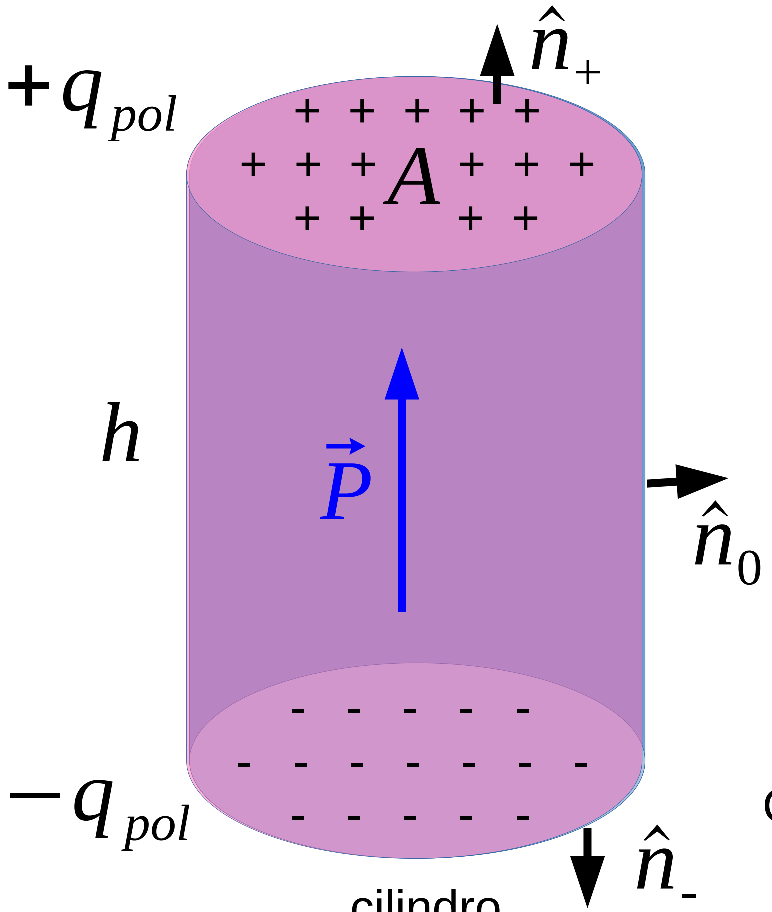
$$\vec{p}_{tot} = \sum_{N_{moléc}} \vec{p}_i = \vec{P}\, V = \vec{P}\, A\, h$$

- No interior do volume do dielétrico, a densidade de carga elétrica é ~ 0 (matéria neutra)
- Nas superfícies planas (perpendiculares ao vetor P), a tendência é aparecer mais cargas de uma polaridade ($+q_{pol}$ em cima e -q_{pol} embaixo).

$$\vec{p}_{tot} = q_{pol}\, h\, \hat{n}_+$$

Versor normal

Densidade de carga superficial



cilindro

$$\vec{p}_{tot}=\sum_{N_{moléc}}\vec{p}_i=\vec{P}\,V=\vec{P}\,A\,h$$

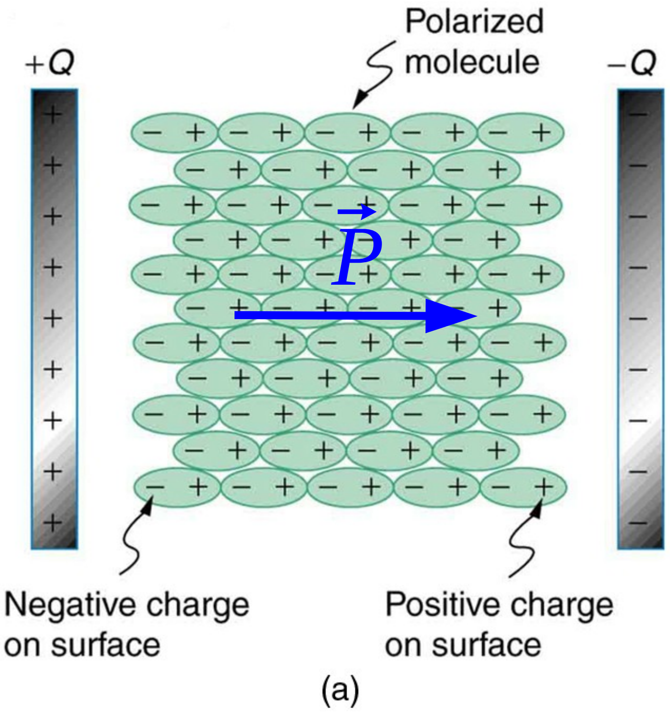
$$\vec{p}_{tot}=q_{pol}\,h\,\hat{n}_+$$

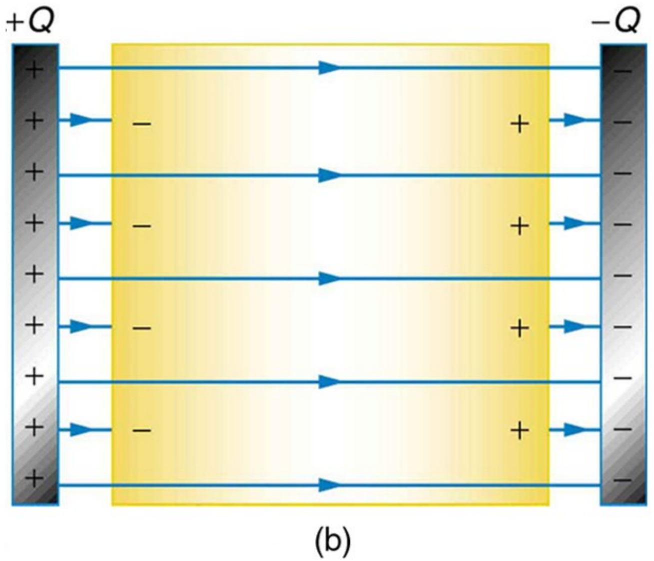
$$\vec{P}\,A\,h=q_{pol}\,h\,\hat{n}_+$$

$$\vec{P}.\hat{n}_+=\frac{+q_{pol}}{A}=\sigma_{pol}$$

Generalizando: $\boxed{\sigma_{pol}=\vec{P}.\hat{n}}$

Cargas na superfície de dielétrico polarizado



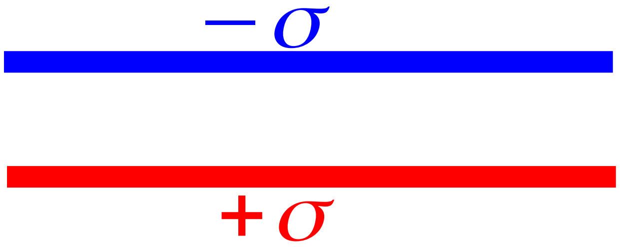


Campo elétrico no interior do dielétrico é **menor**

→ Lei de Gauss

Campo em um capacitor em vácuo

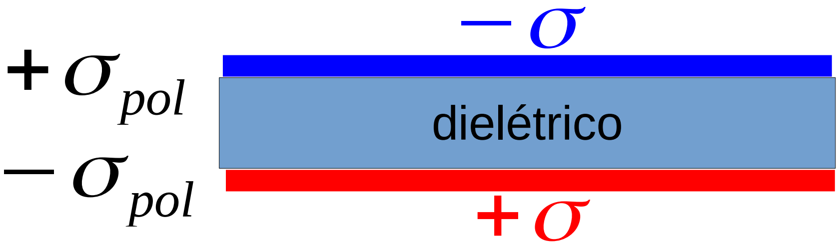
Capacitor
de placas
paralelas



$$\left|\vec{E}_0\right| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A\,\varepsilon_0}$$

Campo com introdução de um dielétrico

(mantendo a carga do capacitor)



$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\left(\sigma - \sigma_{pol}\right)}{\varepsilon_0}$$

Tensão e campo elétrico

- Carga constante: $$Q = \overset{\text{com}}{CV} = \overset{\text{sem}}{C_0 V_0}$$
- Sem o dielétrico (vácuo): $$V_0 = \left|\vec{E}_0\right| d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$
- Com o dielétrico: $$V = \left|\vec{E}\right| d = \frac{\left(\sigma - \sigma_{pol}\right)}{\varepsilon_0} d$$

$$C = \frac{V_0}{V} C_0 = \frac{E_0}{E} C_0 = \frac{\sigma}{\sigma - \sigma_{pol}} C_0 = \kappa C_0$$

Constante dielétrica

$$\kappa \geq 1$$

Constante dielétrica de alguns materiais

TABLE 17–3
Dielectric Constants (at 20°C)

Material	Dielectric constant K	Dielectric strength (V/m)
Vacuum	1.0000	
Air (1 atm)	1.0006	3×10^6
Paraffin	2.2	10×10^6
Polystyrene	2.6	24×10^6
Vinyl (plastic)	2–4	50×10^6
Paper	3.7	15×10^6
Quartz	4.3	8×10^6
Oil	4	12×10^6
Glass, Pyrex	5	14×10^6
Rubber, neoprene	6.7	12×10^6
Porcelain	6–8	5×10^6
Mica	7	150×10^6
Water (liquid)	80	
Strontium titanate	300	8×10^6

$$C = \kappa C_0$$

- A introdução de um dielétrico AUMENTA a capacitância do capacitor

Constante dielétrica e susceptibilidade elétrica

- Relações: $\kappa = \dfrac{E_0}{E}$

$$\varepsilon_0 E = \sigma - \sigma_{pol} = \varepsilon_0 E_0 - P$$

$$\varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 E + \chi \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 (1+\chi) E \qquad \Rightarrow \kappa = 1 + \chi$$

Obs.: Vetor *deslocamento elétrico* de Maxwell ("obsoleto")

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 (1+\chi) \vec{E}$$

Permitividade elétrica do meio

Constante dielétrica e susceptibilidade elétrica

- Relações: $\kappa = \dfrac{E_0}{E}$

$$\varepsilon_0 E = \sigma - \sigma_{pol} = \varepsilon_0 E_0 - P$$

$$\varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 E + \chi \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 (1 + \chi) E \qquad \Rightarrow \kappa = 1 + \chi$$

Obs.: Vetor *deslocamento elétrico* de Maxwell (“obsoleto”)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \kappa \varepsilon_0 \vec{E}$$

Feymann: $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 (1 + \chi) \boldsymbol{E} = \kappa \epsilon_0 \boldsymbol{E}.$

Moysés: $\boxed{\mathbf{D} \equiv \kappa \mathbf{E}}$ Vol. 3 (5.6.15) ??

Faltou ε_0

Constante dielétrica e susceptibilidade elétrica

- Relações: $\kappa = \dfrac{E_0}{E}$

$$\varepsilon_0 E = \sigma - \sigma_{pol} = \varepsilon_0 E_0 - P$$

$$\varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 E + \chi \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 (1+\chi) E \qquad \Rightarrow \kappa = 1 + \chi$$

Obs.: Vetor *deslocamento elétrico* de Maxwell (“obsoleto”)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 (1+\chi) \vec{E} = \kappa \varepsilon_0 \vec{E}$$

Moysés: $\operatorname{div}\left(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}\right) = \varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (12.1.18)$ Vol. 3 $\Rightarrow \vec{D}_{Moysés} = \vec{E} + \dfrac{1}{\varepsilon_0} \vec{P}$ (?? não usual)

Constante dielétrica e susceptibilidade elétrica

- Relações: $\kappa = \dfrac{E_0}{E}$

$$\varepsilon_0 E = \sigma - \sigma_{pol} = \varepsilon_0 E_0 - P$$

$$\varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 E + \chi \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 (1+\chi) E \quad \boxed{\Rightarrow \kappa = 1 + \chi}$$

Obs.: Vetor *deslocamento elétrico* de Maxwell ("obsoleto")

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 (1+\chi) \vec{E} = \kappa \varepsilon_0 \vec{E}$$

Moysés: $\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \kappa \varepsilon_0 \mathbf{E}}$ (5.2) Volume 4. Incorporou ε_0

Cargas no volume do dielétrico polarizado **não uniformemente**

$$\rho_{pol} = -\vec{\nabla} . \vec{P}$$

Comparar com a Lei de Gauss (forma diferencial)

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \vec{\nabla} . \vec{E}$$

Cargas no volume do dielétrico polarizado **não uniformemente**

$$\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

Por quê "menos (-)"?
→ Causa-efeito.
→ Fluxo da polarização em uma superfície fechada.

Observações:

Lei de Gauss
Forma diferencial → Equação de Poisson: $\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

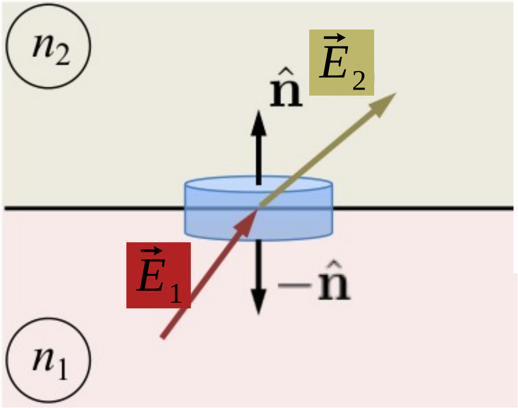
$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

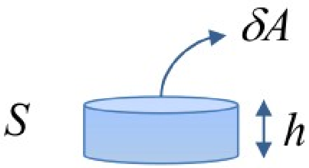
Campo conservativo (eletrostático):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\rho = \rho_{total} = \rho_{livre} + \rho_{pol}$$

Condições de contorno





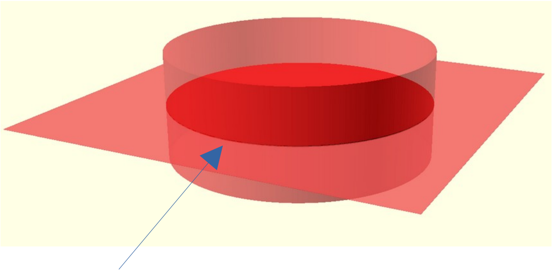
Superfície de Gauss

$h \to 0$

Lei de Gauss:

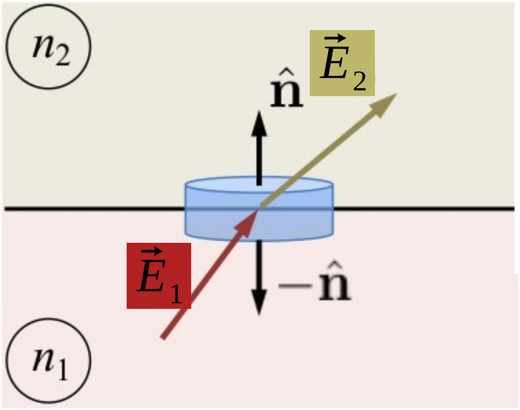
$$\delta\phi_E = \frac{\delta q}{\varepsilon_0} \rightarrow \vec{E}_2 . \hat{n}\, \delta A + \vec{E}_1 . (-\hat{n})\, \delta A = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\, \delta A$$

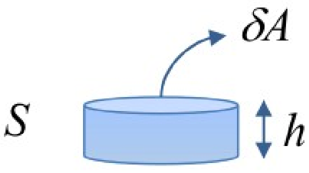
$$\boxed{(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) . \hat{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}} \quad \text{ou} \quad E_{2\perp} - E_{1\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Em geral: $\sigma = \sigma_l + \sigma_{pol}$

Condições de contorno





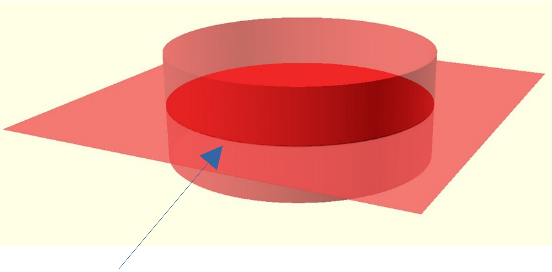
Superfície de Gauss

$h \to 0$

Lei de Gauss:

$$\delta\phi_E = \frac{\delta q}{\varepsilon_0} \rightarrow \vec{E}_2 . \hat{n}\, \delta A + \vec{E}_1 . (-\hat{n})\, \delta A = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \delta A$$

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) . \hat{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \text{ou} \quad E_{2\perp} - E_{1\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



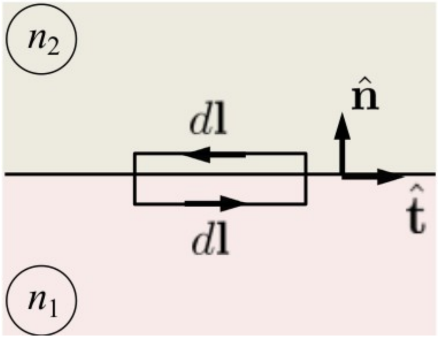
Em geral: $\sigma = \sigma_l + \sigma_{pol}$

Além disso:

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{n} = 0 \quad \text{ou} \quad E_{2\parallel} = E_{1\parallel}$$

Pois:

$$\oint \vec{E} . d\vec{l} = -\delta\phi_{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \rightarrow 0$$



Como seriam as cond. cont. para B?

Como seriam as cond. cont. para B?

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1).\hat{n} = 0$$

$$\hat{n} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{J}_{\text{superf.}}$$

$\vec{J}_{\text{superf.}} = \text{corrente por unidade de comprimento}$

Densidade de energia no dielétrico

$$u=\frac{1}{2}\varepsilon_0\,\kappa\left|\vec{E}^2\right|$$

$$U=\frac{1}{2}C\,V^2$$ (mostrar?)

Parte da energia é armazenada no campo elétrico (macroscópico = médio) e parte da energia para gerar os dipolos (microscópico) do dielétrico polarizado

→ Exemplo de aplicação: força de inserção lateral sobre o dielétrico