MAT0311/MAP0217 - 2o. Semestre de 2023

5a. lista de exercícios

1. Sejam (X, d) um espaço métrico e A, B subconjuntos de X, ambos não vazios. Suponha que $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$. Mostre que existem U, V abertos em X tais que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$. Sugestão: considere a função contínua $x \mapsto d(x, A) - d(x, B)$.

2. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ a função que vale zero para $0 \leq x < 1/2$, vale um para $1/2 < x \leq 1$ e vale $1/2$ para $x = 1/2$. Determine um subconjunto U aberto em $\mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(U)$ não é aberto em $\mathbb{R}$.

3. Mostre que se $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua então f pode ser estendida a uma função contínua em $[0, 1]$.

4. Sejam (X, d_X), (Y, d_Y) espaços métricos e $f : X \to Y$ bijetora e contínua. Mostre que se X é compacto então $f^{-1} : Y \to X$ é contínua.

5. Sejam (X, d_X), (Y, d_Y) espaços métricos e $f : X \to Y$. Dizemos que f é *própria* se $f^{-1}(K)$ é compacto em X, qualquer que seja o compacto K de Y. Mostre as seguintes propiedades:

- Se X é compacto e se $f : X \to Y$ é contínua então f é própria;
- Se Y é compacto e se $f : X \to Y$ é própria então f é contínua;
- Dada $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ escrevemos $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ se para todo $R > 0$ existir $\rho > 0$ tal que se $x \in \mathbb{R}^N$ e se $|x| > \rho$ então $|f(x)| > R$. Mostre que se f é própria então $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ e também que, se f for contínua, a recíproca é verdadeira.

6. Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- $f(B)$ é limitado em $\mathbb{R}^M$, qualquer que seja $B \subset \mathbb{R}^N$ limitado;
- O conjunto
$$\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M : x \in \mathbb{R}^N\}$$
é fechado em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$.

Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}^N$.

7. Sejam (X, d) um espaço métrico e $\{A_i\}_{i \in I}$ uma família de subconjuntos conexos de X com intersecção não vazia. Mostre que $\bigcup_{i \in I} A_i$ é um subconjunto conexo de X. Mostre também que se cada A_i é conexo por caminhos o mesmo será verdade para $\bigcup_{i \in I} A_i$.

8. Mostre que se A é um subconjunto conexo em um espaço métrico (X, d) e se $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ então B também é conexo.

9. Demonstre o seguinte teorema:

Teorema. *Um subconjunto aberto não vazio Ω de $\mathbb{R}^N$ é conexo se, e somente se, é conexo* *por caminhos.*

Sugestão. Já sabemos que, sempre, conexidade por caminhos implica conexidade. Para a recíproca fixemos $x_0 \in \Omega$ e considere o conjunto

$$U := \{x \in \Omega : \text{ existe uma função contínua } \gamma : [a, b] \to \Omega \text{ com } \gamma(a) = x_0,\, \gamma(b) = x\}\,.$$

Mostre que U e $\Omega \setminus U$ são abertos em Ω.

- - - - o o o - - - -