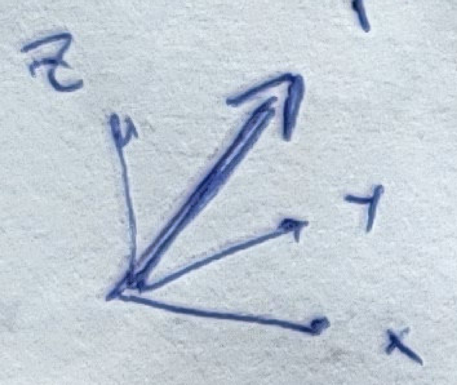
3D:
- vetores e matrizes
- sistemas de coordenadas
- leis de conservação de 1d → 3d
- Momento angular (Força central)

Cap 1 Marion (e cap 2)
Cap 3 Symon
Cap 3 Kibble

caro ☺

Vetor tem módulo, direção, sentido = seg/o de reta orientado



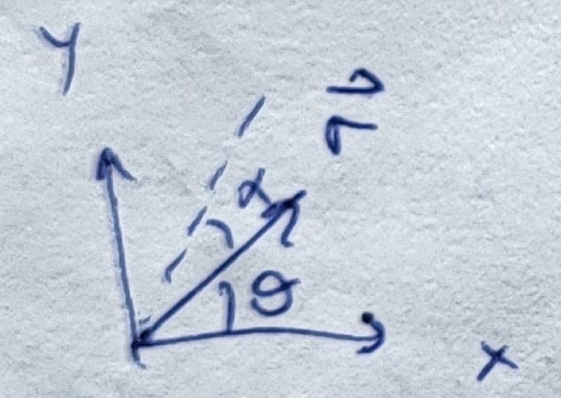
$\vec r$ "de madeira"

quando escrevo $\vec a$ como (a_x, a_y, a_z) escolhi 1 base

$$|\vec a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\vec a = a_x \hat i + a_y \hat j + a_z \hat k$$

em 2d:

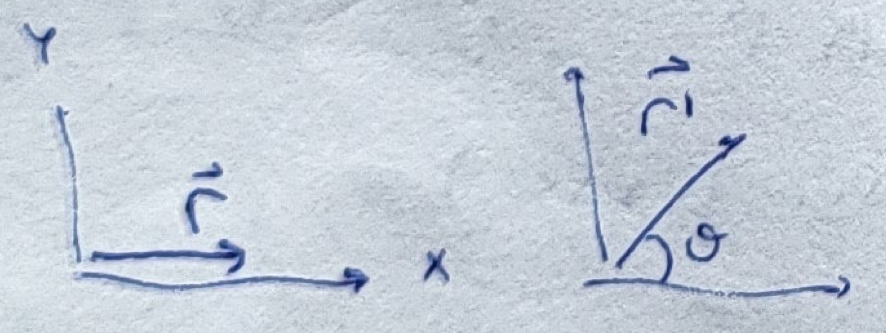


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ r = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

rodado: $\vec r' = R(\alpha)\vec r = \begin{pmatrix} r\cos(\theta+\alpha) \\ r\sin(\theta+\alpha) \end{pmatrix}$ ⇓ verifique

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

check: (de R)



$$\vec r' = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$$

Note: $R^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = R^{-1}$ → verifico $(\ )(\ ) = \begin{pmatrix} \cos^2+\sin^2 & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \mathbb{1}$

troca linhas c/ colunas

ou: operação corresponde a $R(-\alpha)$ portanto é a inversa!

lembre: matriz ⟺ operador

em particular:
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ → verifico $(AB)^{-1}(AB) = \mathbb{1}$

ou: $\left[\begin{pmatrix}\text{por} \\ \text{sapato}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{por} \\ \text{meia}\end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix}\text{tirar} \\ \text{meia}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{tirar} \\ \text{sapato}\end{pmatrix}$

idem p/ transposta, mas é fácil demonstrar $(AB)^T_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k A_{jk}B_{ki} = (B^T A^T)_{ij}$ //

$\det R = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ → transformação ortogonal não muda o módulo do vetor, só a direção

em geral: Matriz × vetor = vetor é 1 transf. "radical" (mas linear!) muda a direção, "embaralha" as coordenadas do vetor exceto em casos especiais, em que uma "mágica" acontece, e a matriz é como se fosse um número!

p/ A os vetores "mágicos" são os autovetores e os números são autovalores:

$$\begin{cases} A\vec{u} = \lambda_1 \vec{u} \\ A\vec{v} = \lambda_2 \vec{v} \end{cases}$$

Matriz 2x2 terá Dois autovetores e.g. $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

analogia c/ rotações: $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serão ortogonais ($\vec{u}\cdot\vec{v}=0$) e terão de módulo 1 $\Rightarrow$ novos "eixos" (!)

$\Rightarrow$ nesta nova base a matriz será diagonal

isto é a mecânica quântica!! ☺

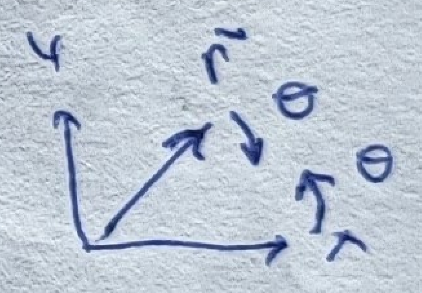
$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ $\quad A\vec{r} \neq \overset{\text{número}}{a}\vec{r}$

MAS $A\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}$

$A\vec{v} = \lambda_2 \vec{v}$

$R = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ rotação p/ novos eixos! $\Rightarrow$ será!?

se for verdade: todo vetor irá p/ $R^T\vec{r}$ pois se o eixo roda θ o vetor "roda" θ ao contrário



$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} \Rightarrow x'\hat{\imath}' + y'\hat{\jmath}' = R^T\vec{r}$

(quando escrevo x, y escolhi base)

vetor se transforma com R^T, matriz A será: $\underline{R^TAR}$

$$R^TAR = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 v_1 \\ \lambda_1 u_2 & \lambda_2 v_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot \underbrace{(u_1^2+u_2^2)}_{=1} & \lambda_2 \cancel{\vec{u}\cdot\vec{v}}^{\,0} \\ \lambda_1 \cancel{\vec{u}\cdot\vec{v}}^{\,0} & \lambda_2 \underbrace{(v_1^2+v_2^2)}_{=1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ a ação de A ñ muda (operação) mas fica + simples né!

$A\vec{r} \rightarrow A'\vec{r}'$ são iguais, apenas "traduzidos": $\underbrace{A'\vec{r}'}_{\text{vetor na base linha}} = (R^TAR)(R^T\vec{r}) = \underbrace{R^T(A\vec{r})}_{\text{vetor } A\vec{r} \text{ "traduzido"}}$

$\Rightarrow$ Como encontro $\lambda_1, \lambda_2, \vec{u}, \vec{v}$? *

$\Rightarrow$ Qual o ângulo de "rotação" p/ ir de $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ p/ $\vec{u} = \hat{\imath}'$, $\vec{v} = \hat{\jmath}'$?

<u>Sutileza</u>: há outra transf. ortogonal possível: $\begin{pmatrix}-1&&0\\&-1&\\0&&-1\end{pmatrix}$

→ reflexão!

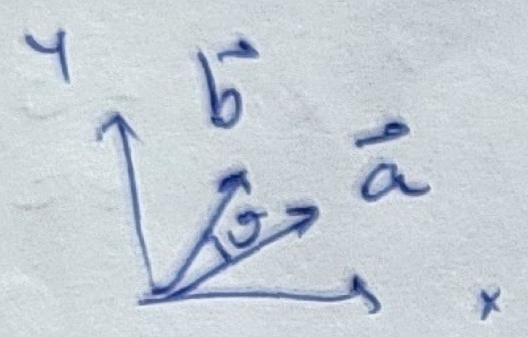
p/ 2d é 1 rotação tb, mas p/ 3d não!
(o resto é análogo p/ 3d)

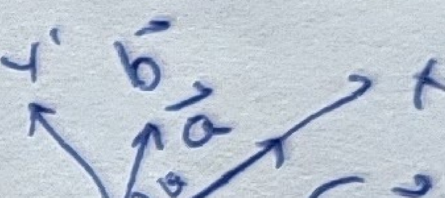
em 2d $\det\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=1$ em 3d é -1 → não é rotação

etc: rotações não <u>comutam</u>

<u>Produtos</u>: $\boxed{\text{escalar}}$ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ = projetar um na direção do outro

↪ $(\quad)\left(\,\big|\,\right) = a^T\cdot b$ resultado é um <u>número</u>
não muda c/ a base (!)



$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ por ex. na "base" 

$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$ $\begin{cases}\vec{a} = |\vec{a}|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ \vec{b} = |\vec{b}|\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\end{cases}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_i a_i b_i$

$\boxed{\text{vetorial}}$ $\vec{a}\times\vec{b} \equiv \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$

ou $a_1\ a_2\ a_3$ etc

mais simples: $(\vec{a}\times\vec{b})_i = \underbrace{\varepsilon_{ijk}}\, a_j b_k$ soma implícita p/ índice repetido → notação de Einstein

tensor totalmente antisimétrico

$\left[\begin{array}{l}\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} \ (\text{2 trocas}) = \varepsilon_{312} \ (\text{2 trocas}) = 1\\ \varepsilon_{132} \ (\text{1 troca}) = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} \ (\text{3 trocas}) = -1\end{array}\right.$ índices repetidos $= 0$ pois é antisim, a troca deve dar o negativo...

(*) → Consegue fazer a conta das 27 possibilidades?

ajuda muito! ☺ e.g. vetor $\vec{\partial} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z) \equiv \partial_x, \partial_y, \partial_z$

$\nabla\times\vec{a} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j A_k$; $\nabla\cdot\vec{a} = \partial_i a_i$

dá p/ ver facilmente que: $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{a}) = \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\text{antisim}}\underbrace{\partial_i\partial_j}_{\text{sim}} a_k = 0$ //

$=(\partial_x\varphi, \partial_y\varphi, \partial_z\varphi)$ $[\nabla\times(\nabla\varphi)]_i = \underbrace{\varepsilon_{ijk}}\,\underbrace{\partial_j\partial_k}\varphi = 0$!

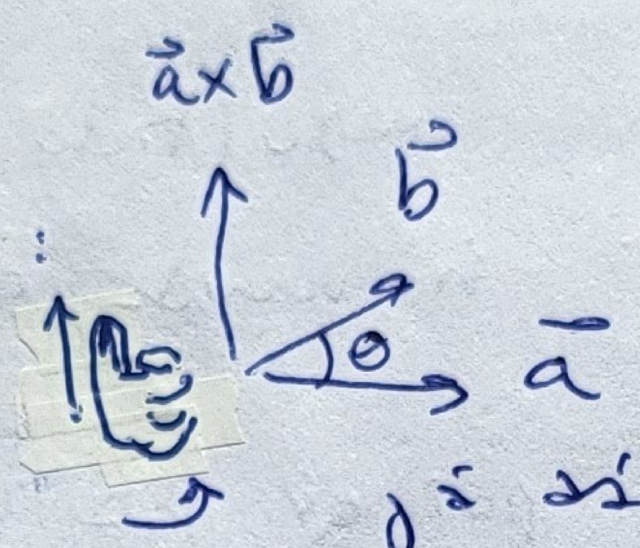
produto misto: $\vec a\cdot(\vec b\times\vec c) \overset{\text{cíclico}}{=} \vec c\cdot(\vec a\times\vec b)$ etc

dem: $a_i(\vec b\times\vec c)_i = a_i\varepsilon_{ijk}b_jc_k = \varepsilon_{kij}c_k a_ib_j$
$= c_k(\varepsilon_{kij}a_ib_j) = c_k(a\times b)_k$
$= \vec c\cdot(\vec a\times\vec b)$ //

geometricamente: $|\vec a\times\vec b| = |\vec a||\vec b|\sin\theta$

$\vec a\times\vec b$ é ortogonal a $\vec a$ e $\vec b$ (significa que não tem projeção, produto escalar é zero)

regra da mão direita:



nota: $\hat\imath\times\hat\jmath=\hat k$, $\hat\imath\times\hat\imath=0$ etc
$\hat k\cdot\hat\imath=0$

já dá p/ ver que é algo que "roda" :)

dem: $(\vec a\times\vec b)^2 \overset{?}{=} |\vec a|^2|\vec b|^2\sin^2\theta = |\vec a|^2|\vec b|^2(1-\cos^2\theta) = |\vec a|^2|\vec b|^2-(\vec a\cdot\vec b)^2$

explícito: $(a_xb_y-a_yb_x)^2+(a_yb_z-a_zb_y)^2+(a_xb_z-a_zb_y)^2 \overset{?}{=}$
$(a_x^2+a_y^2+a_z^2)(b_x^2+b_y^2+b_z^2)-(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)^2$

↳ termos c/ índice repetido cancelam ↙

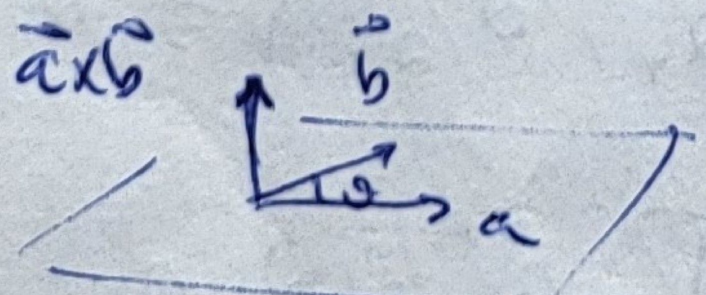
ou: $\underbrace{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}}a_jb_ka_lb_m = \delta_{jl}\delta_{km}a_ja_lb_kb_m-\delta_{jm}\delta_{kl}a_jb_ka_lb_m$

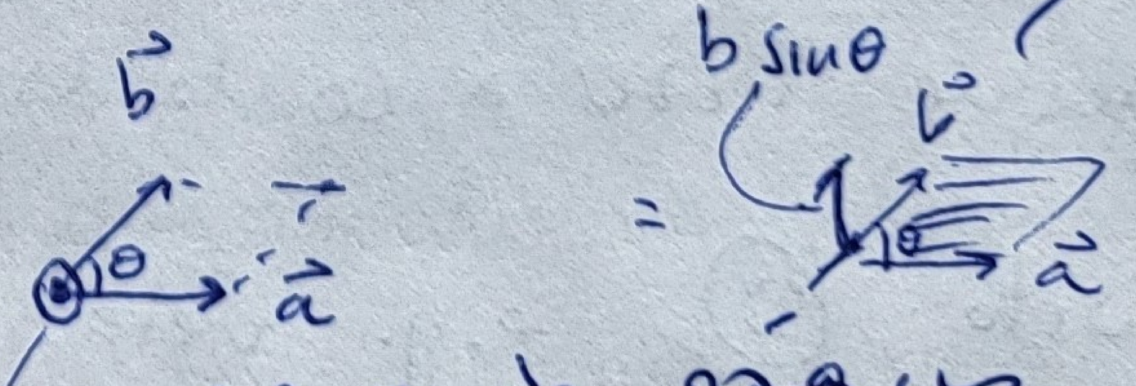
$\sum_i$ → só "sobram" termos com $j=l$, $k=m$ ou $j=m$, $k=l$ (com sinal(−))

somas em i,j,k,l,m: $=(\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl})$

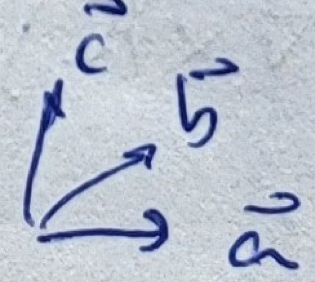
$= a^2b^2-(\vec a\cdot\vec b)^2$:)

é a área do paralelogramo





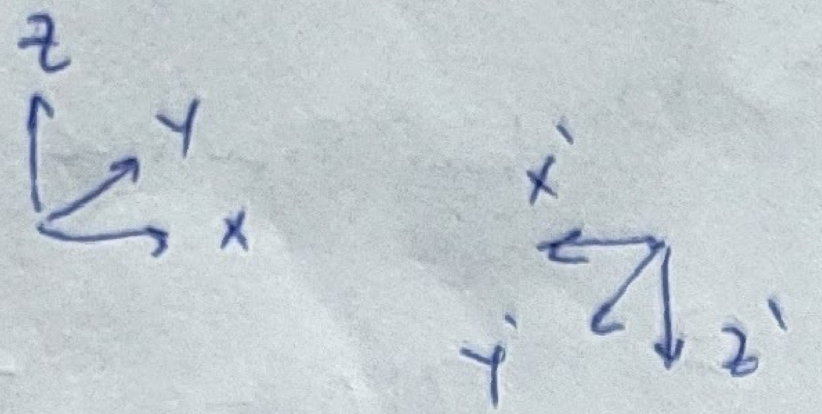
e o produto misto é o volume do paralelepípedo (?)
definido por $\vec a,\vec b,\vec c$



$(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c$

(*) demonstre!

Note: p/ transf. $\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$ os eixos vão p/ mão esq. rodada (!)



e $\vec{r} \to -\vec{r}$ vetores invertem sinal
escalar ñ muda ✓

MAS: prod. vetorial
ñ muda de sinal, é vetor "fajuto" = pseudo vetor
prod. misto muda → é escalar fajuto = pseudo escalar

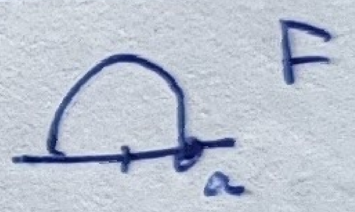
∴ tome cuidado!

Vetor posição $\vec{r} \to -\vec{r}$
velocidade $\vec{v} \to -\vec{v}$ pois $\vec{v} = d\vec{r}/dt$
ñ muda ☺
momento $\vec{p} \to -\vec{p}$

Agora considere: 2ª lei $\vec{F} = m\vec{a} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

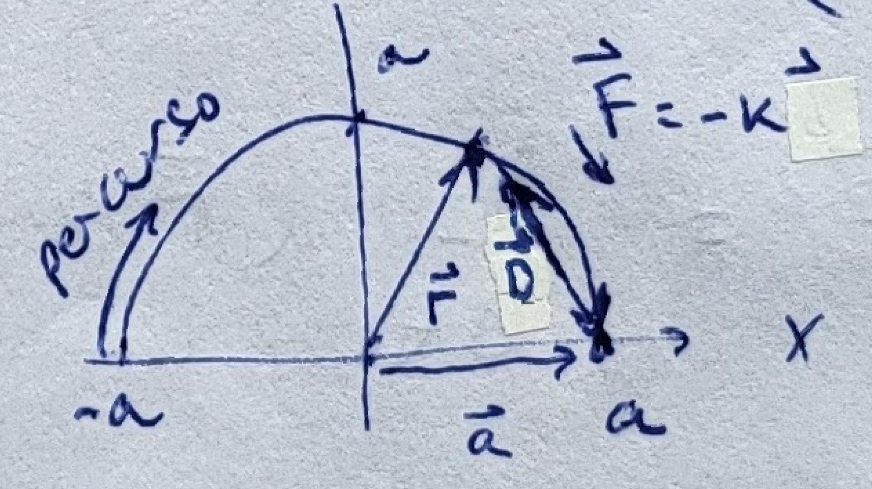
---

em 3d: $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ (*) exemplo (Symon)



em semicírculo

faz p/ coord. cartesianas x, y



$\vec{F}$ proporcional à distância do pto (a,0) apontando p/ lá

e p/ coord. angular → $W = 2ka^2$

↳ maneira diferente (sem ângulos): decompondo em x e y
do livro

$\vec{r} = \vec{a} + \vec{D}$ → $\vec{D} = (x-a, y)$

$\vec{r}$: (x,y); $\vec{a}$: (a,0)

$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int F_x dx + \int F_y dy$

$\vec{F} = -k\vec{D} \to \begin{cases} F_x = k(a-x) \\ F_y = -ky \end{cases}$

Note: a parte y vai dar zero (!)
trabalho da subida = da descida
→ mas fica + claro se contar separadamente

$W = \int_{-a}^{a} \overbrace{F_x dx}^{k(a-x)dx} + \int_0^a \overbrace{F_y dy + \int_a^0 F_y dy}^{-ky\,dy} = -\cancel{\dfrac{kx^2}{2}}\Big|_{-a}^{a} {}^{= 0} + kax\Big|_{-a}^{a} + 0$

→ é conservativa? (*)

Força conservativa: $\left[\begin{array}{l} F \text{ só depende da posição} \\ W \text{ não depende da trajetória} \end{array}\right.$

$$\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec F \cdot d\vec r = V(\vec r_1) - V(\vec r_2) = \underbrace{\overset{K_2 - K_1}{T_2 - T_1}}_{\text{en. cinética}}$$

$$\Rightarrow \oint \vec F \cdot d\vec r = 0 \quad \text{portanto} \quad \vec F = \nabla \varphi \equiv -\nabla V(\vec r)$$

$$= \int_{sup.} (\nabla \times \vec F) \cdot \underbrace{d\vec S}_{\hat n\, dS}$$

$\left[\begin{array}{l} dV = -\vec F \cdot d\vec r \\ \vec F = -\nabla V \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ como antes $E = \text{const.} = K + V$
(boring...)

Tomando $\vec r \times (\vec F = d\vec p/dt)$: $\vec r \times \vec F = \vec r \times \dfrac{d\vec p}{dt}$ $\quad = m\, d\vec r/dt$

note $\dfrac{d}{dt}(\underbrace{\vec r \times \vec p}_{\substack{\text{coord. } i \\ = \varepsilon_{ijk} r_j p_k}}) = \cancel{\dfrac{d\vec r}{dt} \times \vec p} + \vec r \times \dfrac{d\vec p}{dt}$ $\rightarrow$ regra da cadeia, pense nas coordenadas

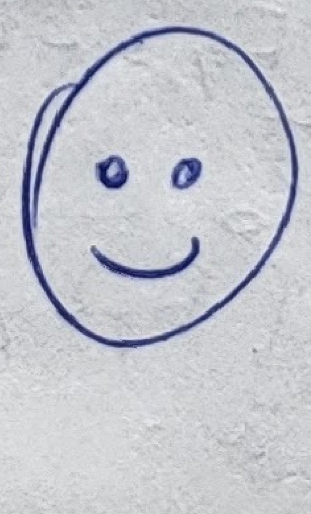
mas : $\dfrac{d\vec r}{dt} \times \vec p = m(\vec v \times \vec v) = 0$

$\therefore \vec r \times \vec F = \dfrac{d}{dt}(\underbrace{\vec r \times \vec p}_{\text{momento angular} \equiv \vec L})$

Se $\underbrace{\vec F \,/\!/\, \vec r}_{\vec r \times \vec F = 0}$ (força central) $\longrightarrow$ momento angular é conservado !!

$\rightarrow$ simetria de rotação (a física não depende do ângulo)

implica
$\therefore$ conservação
do mom. angular
teo. de Noether



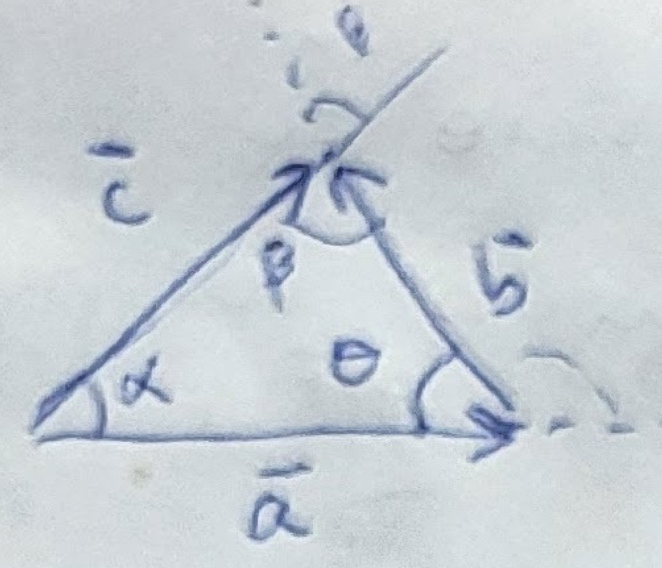
$\vec L = \vec r \times \vec p =$

~~Xpto~~ $= m(\vec r \times \vec v)$

$\equiv (\vec \omega r^2)$ eixo

módulo $= r\, v_t$, direção da rotação

Note:



lei dos cossenos $\leftrightarrow$ adição vetorial + produto esc.

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow c^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) =$

(prod. escalar c/ ele mesmo)

$= a^2 + b^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$$\Rightarrow \boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

lei dos senos $\leftrightarrow$ adição vet. + prod. vet.

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

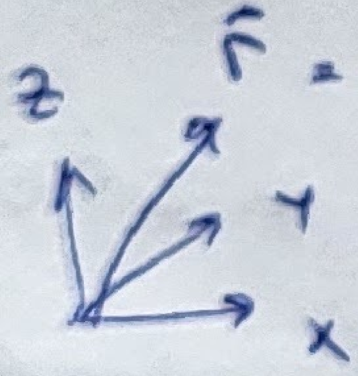
$$\begin{cases} \vec{b}\times\vec{c} = \vec{b}\times\vec{a} + \cancel{\vec{b}\times\vec{b}}^{\,0} \\ \vec{a}\times\vec{c} = \cancel{\vec{a}\times\vec{a}}^{\,0} + \vec{a}\times\vec{b} \end{cases}$$

tirando módulo: $\begin{cases} \cancel{b}c\sin\beta = \cancel{b}a\underbrace{\sin\theta}_{=\sin(\pi-\theta)} \\ \cancel{a}c\sin\alpha = \cancel{a}b\sin\theta \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{c}{\sin\theta} = \frac{b}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\beta}}$$

Sistemas de Coordenadas

cartesianas

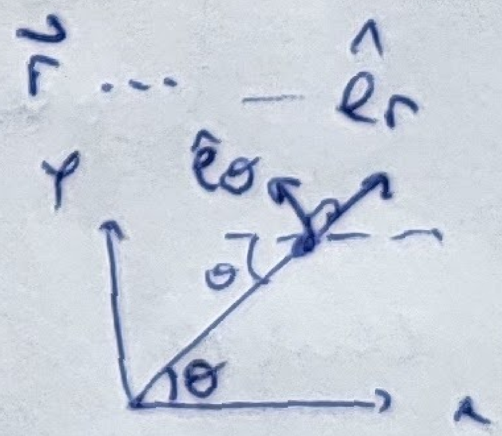


$\vec{r} = (x, y, z)$ eixos $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ (ou $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$) são fixos

esf., etc.

eixos mudam c/ $\vec{r}$ ...

em 2d:



$$\begin{cases} \hat{e}_r = \hat{\imath}\cos\theta + \hat{\jmath}\sin\theta \\ \hat{e}_\theta = -\hat{\imath}\sin\theta + \hat{\jmath}\cos\theta \end{cases}$$

tb: $\frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta} = -\hat{e}_r$

note: $\hat{e}_\theta = \frac{d}{d\theta}\hat{e}_r$

o eixo angular "puxa" o eixo radial p/ mudar

$\vec{r} = r\hat{e}_r$

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r$

$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{d\hat{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\hat{e}_\theta$

$$\boxed{\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta}$$

$\vec{v} = d\vec{r}/dt = \dot{\vec{r}}$

tem componente radial $\dot{r}$ e angular, dada por dl/dt

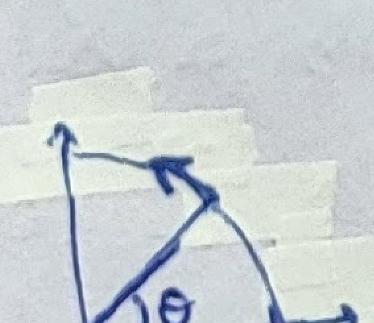
l = arco de circunf. $= r\theta$ $\quad 2\pi r/r$ = círculo inteiro

$\therefore dl/dt = r\,d\theta/dt = r\dot{\theta}$

tb chamado de ω...

$\theta = \frac{l}{r}$

definição!



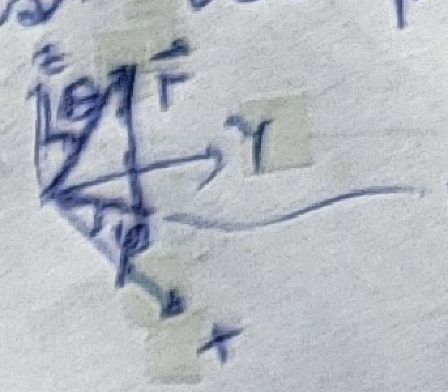
vale p/ $\forall$ ângulo (em radianos, é o significado de radiano...)

M.C.U: $v = \omega r$ ☺

etc

$\rightarrow$ penso em 2d (coord. polares) e adapto aos outros casos "angulares" em geral: (coord. esféricas) $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_\varphi$

análogo, pois p/ movim/o angular no plano xy o "raio" é $(r\sin\theta)$



se fossem cilíndricas ρ, φ, z: $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \dot{z}\hat{e}_z$ (análogo ...) é 1 "mix" de cartesianas e angular

e a aceleração? $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}}$

em 2d: vimos acima $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$ — d/dt p/ raio fixo

e $\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\hat{e}_r}{d\theta} = \dot{\theta}\hat{e}_\theta$; $\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta} = -\dot{\theta}\hat{e}_r$

portanto: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\hat{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\hat{e}}_\theta =$ — regra da cadeia ...

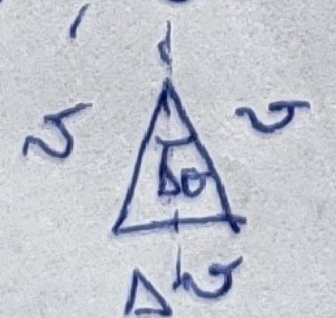
$= \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}(\dot{\theta}\hat{e}_\theta) + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{e}_r)$

agrupando as direções $= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$

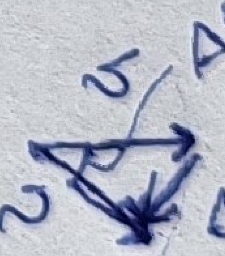
acel. radial — nossa velha amiga aceleração centrípeta! — aceleração angular $= \dot{\omega}$

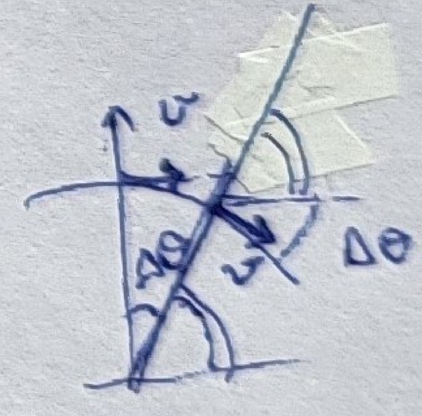
check: a_{cp} p/o centro $\therefore \parallel -\hat{e}_r$ ✓

é $= r\omega^2$, ou $r(v/r)^2 = v^2/r$ ✓



$\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = \frac{\Delta v/2}{v}$





p/ $\frac{\Delta\theta}{2}$ pequeno: $\sin\Delta\theta/2 \sim \Delta\theta/2 \Rightarrow \Delta v = v\,\Delta\theta$

$\therefore dv/dt = v\,d\theta/dt = v\omega = v^2/r$ //

AGORA: podemos estudar movimento em 3d sob ação de força central $(\vec{F} \parallel \hat{r})$, com mom. ang. $\vec{L}$ conservado

$\therefore$ aceleração só radial! de fato! $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$ (parte angular) equivale a $d/dt\,(r^2\dot{\theta}) = 0 \to \frac{d}{dt}(mr^2\omega) = 0$ //