Lista 1 - MAT2352

Cálculo para Funções de Várias Variáveis II

Problema 1. *Inicialmente,*

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\ dxdy \quad = \quad \int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\ dx \Big) dy$$

Considerando y *constante, e a mudança de variáveis* $t = x + y$ *temos a variação de* x *entre* 0 *e* 1 *induz uma variação de* t *entre* $t = 0 + y = y$ *e* $t = 1 + y$*, donde*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\ dx &= \int_y^{y+1} \frac{t-2y}{t^3}\ dt \\
&= \int_y^{y+1} \frac{1}{t^2} - \frac{2y}{t^3}\ dt \\
&= \Big(-\frac{1}{t} + \frac{y}{t^2} \Big)\Big|_y^{y+1} \\
&= -\frac{1}{y+1} + \frac{y}{(y+1)^2} + \frac{1}{y} - \frac{y}{y^2} \\
&= -\frac{1}{(y+1)^2}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\ dxdy &= \int_0^1 -\frac{1}{(y+1)^2}\ dy \\
&= \frac{1}{y+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Para a segunda integral, basta notar que, invertendo x *e* y *nas integrais temos*

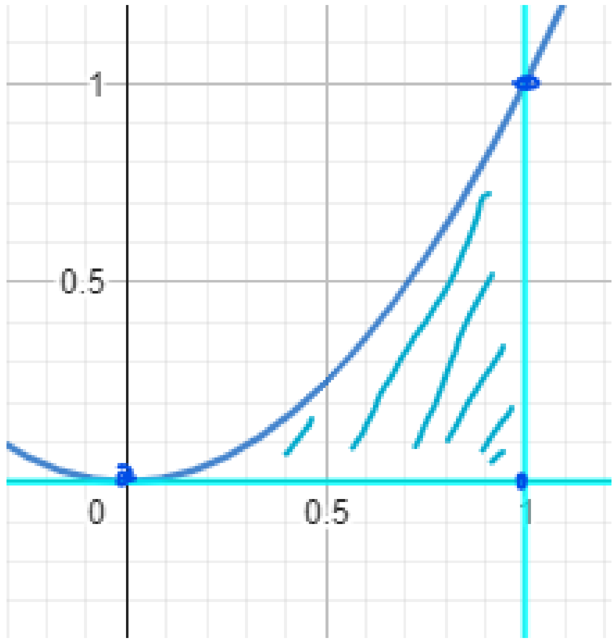
$$-\frac{1}{2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{y-x}{(y+x)^3}\ dydx$$

donde

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\ dydx &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{-(y-x)}{(x+y)^3}\ dydx \\
&= -\int_0^1 \int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3}\ dydx = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Problema 2.

(a) Sendo o domínio limitado por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$, obtemos



o encontro das funções ocorre em $(0,0), (1,0)$ e $(1,1)$, sendo este último o encontro de $x = 1$ e $y = x^2$.

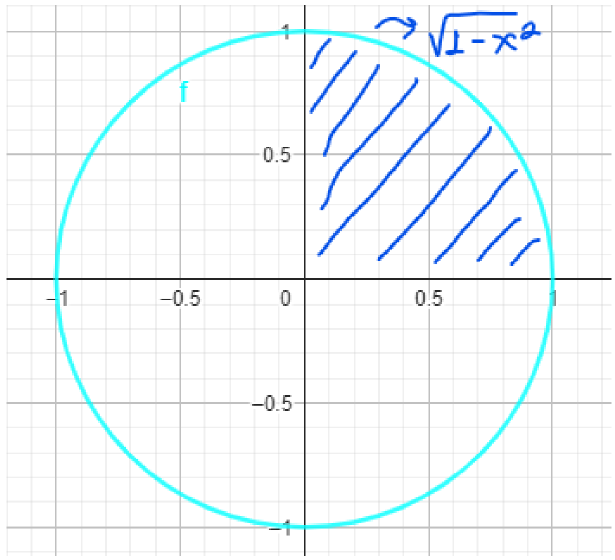
Desta forma, obtemos como domínio de integração

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq x^2\}$$

donde

$$\begin{aligned}
\int\int_D x \cos y \ dxdy &= \int_0^1 \int_0^{x^2} x \cos y \ dydx \\
&= \int_0^1 x \sin y \Big|_0^{x^2} \ dx \\
&= \int_0^1 x \sin x^2 - x \sin 0 \ dx \\
&= \int_0^1 x \sin x^2 \ dx \\
&\overset{t=x^2}{=} \int_0^1 \frac{1}{2} \sin t \ dt \\
&= -\frac{1}{2} \cos t \Big|_0^1 \\
&= -\frac{1}{2} \cos 1 + \frac{1}{2} \cos 0 = \frac{1 - \cos 1}{2}
\end{aligned}$$

(b) *O domínio corresponde à região do primeiro quadante limitada pela circunferência de centro na origem e raio* 1, *logo*



Como a equação que descreve o círculo unitário é dada por

$$x^2 + y^2 = 1$$

obtemos

$$y = \sqrt{1-x^2} \text{ e } y = -\sqrt{1-x^2}$$

Uma vez que estamos no quadrante positivo, a equação que rege a parte da circunfêrencia correspondente ao domínio será $y = \sqrt{1-x^2}$ *donde*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

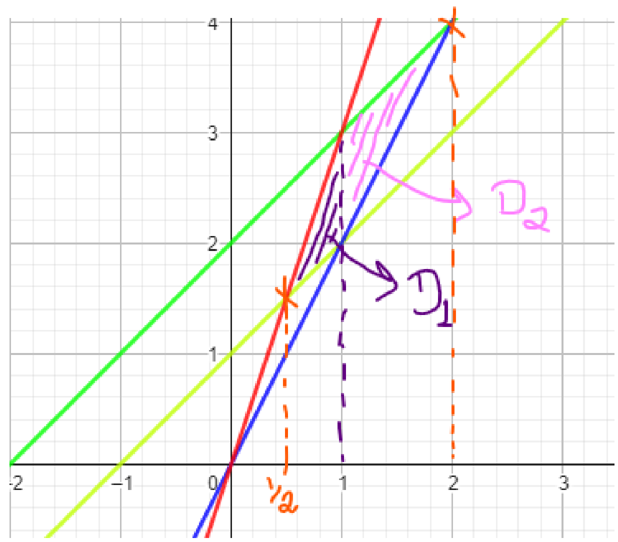
e assim

$$\begin{aligned}
\int\int_D xy \ dxdy &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy \ dydx \\
&= \int_0^1 \frac{x}{2} y^2 \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \ dx \\
&= \int_0^1 \frac{x}{2} (\sqrt{1-x^2})^2 \ dx \\
&= \int_0^1 \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2} \ dx \\
&= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^4 \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

(c) *O domínio de integração é limitado pelas retas*

$$y = x + 1, y = x + 2, y = 2x, y = 3x$$

isto é,



O domínio é determinado por dois subdomínios, os quais denotaremos por D_1 *(subdomínio roxo) e* D_2 *(subdomínio rosa).*

Para definir tais subdomínios, é necessário determinar os pontos de intersecção entre as retas.

- *As retas* $y = 3x$ *(vermelha) e* $y = x + 1$ *(amarela) se intersectam em* $3x = x + 1$, *isto é,* $x = 1/2$.
- *As retas* $y = 2x$ *(azul) e* $y = x + 2$ *(verde) se intersectam em* $2x = x + 2$, *ou seja,* $x = 2$.
- *As retas* $y = 3x$ *(vermelha) e* $y = x + 2$ *(verde) se intersectam em* $3x = x + 2$, *donde* $x = 1$.
- *As retas* $y = 2x$ *(azul) e* $y = x+1$ *(amarela) se intersecatam em* $2x = x+1$, *donde* $x = 1$.

Desta forma, os domínios são determinados como na figura, obtendo

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \ , \ x + 1 \leq y \leq 3x\}$$

e

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \ , \ 2x \leq y \leq x + 2\}$$

onde a intuição para D_1 (roxo) é que um ponto pertence a esse domínio se o y correspondente varia começando da reta amarela e pode subir até a reta vermelha. De mesma forma, o domínio D_2 corresponde aos y que começam da reta azul e podem subir até a reta verde.

Finalmente

$$\int\int_D e^{y-x}\ dxdy \quad = \quad \int\int_{D_1} e^{y-x}\ dxdy + \int\int_{D_2} e^{y-x}\ dxdy$$

como

$$\begin{aligned}
\int\int_{D_1} e^{y-x}\ dxdy &= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{x+1}^{3x} e^{y-x}\ dydx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{y-x}\Big|_{x+1}^{3x}\ dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{2x} - e^{1}\ dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x} - xe\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} \\
&= \frac{1}{2}e^{2} - e - \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e = \frac{1}{2}e^{2} - e
\end{aligned}$$

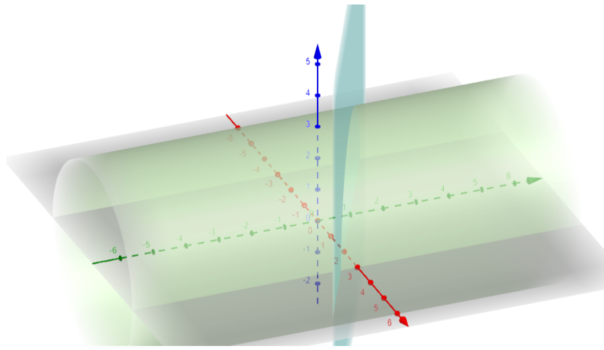
e

$$\begin{aligned}
\int\int_{D_2} e^{y-x}\ dxdy &= \int_{1}^{2}\int_{2x}^{x+2} e^{y-x}\ dydx \\
&= \int_{1}^{2} e^{y-x}\Big|_{2x}^{x+2}\ dx \\
&= \int_{1}^{2} e^{2} - e^{x}\ dx \\
&= xe^{2} - e^{x}\Big|_{1}^{2} \\
&= 2e^{2} - e^{2} - e^{2} + e^{1} = e
\end{aligned}$$

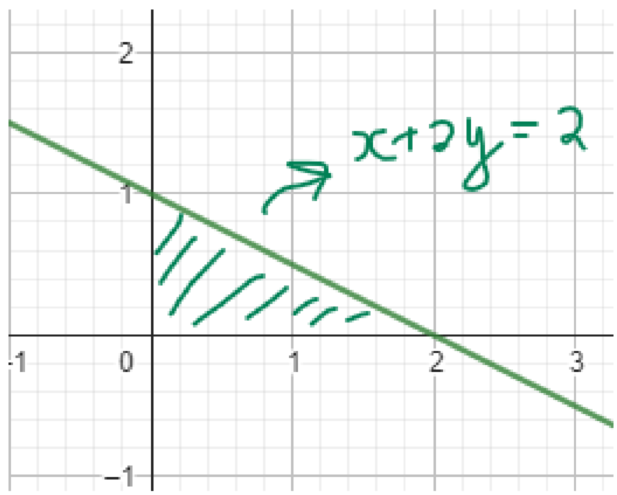
donde

$$\int\int_D e^{y-x}\ dxdy = \frac{1}{2}e^{2} - e + e = \frac{1}{2}e^{2}$$

Problema 3. *(a) O sólido e plano determinam*



de forma que o domínio de integração, a projeção da intersecção no plano xy, é dada pelo triângulo



donde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \ , \ 0 \leq y \leq \frac{2 - x}{2}$$

Para encontrar-se o volume desejado, basta integrarmos a função que define o ciclindro sob o domínio acima, isto é, integramos

$$x^2 + z^2 = 9 \Rightarrow z = \sqrt{9 - x^2} \text{ ou } z = -\sqrt{9 - x^2}$$

como estamos no primeiro octante

$$f(x, y) = z = \sqrt{9 - x^2}$$

donde o volume é dado por

$$\begin{aligned}
V &= \int\int_D \sqrt{9-x^2}\ dxdy \\
&= \int_0^2 \int_0^{\frac{2-x}{2}} \sqrt{9-x^2}\ dydx \\
&= \int_0^2 \sqrt{9-x^2}y\Big|_0^{\frac{2-x}{2}}\ dx \\
&= \int_0^2 \frac{2-x}{2}\sqrt{9-x^2}\ dx \\
&= \int_0^2 \sqrt{9-x^2}\ dx - \frac{1}{2}\int_0^2 x\sqrt{9-x^2}\ dx
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^2 x\sqrt{9-x^2}\ dx &\overset{t=x^2}{=} \frac{1}{4}\int_0^4 \sqrt{9-t}\ dt \\
&= -\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(9-t)^{3/2}\Big|_0^4 \\
&= \frac{1}{6}(27-5^{3/2})
\end{aligned}$$

e

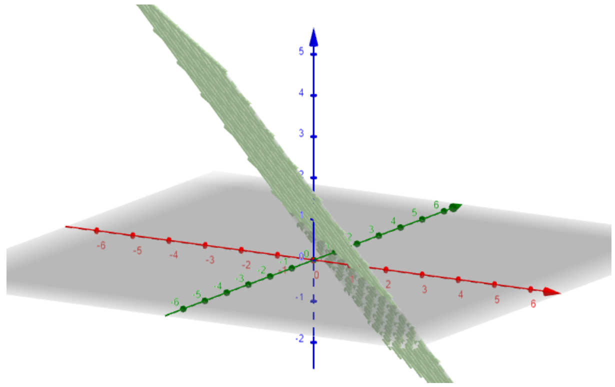
$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\ dx &\overset{x=3\sin t}{=} \int_0^{\arcsin\frac{2}{3}} \sqrt{9-9\sin^2 t}(3\cos t)\ dt \\
&= \int_0^{\arcsin\frac{2}{3}} 9\cos^2 t\ dt \\
&= 9\Big(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\Big)\Big|_0^{\arcsin\frac{2}{3}} \\
&= \frac{9}{2}\arcsin\frac{2}{3}+\frac{9}{4}(\frac{4\sqrt{5}}{9}) = \frac{9}{2}\arcsin\frac{2}{3}+\sqrt{5}
\end{aligned}$$

donde

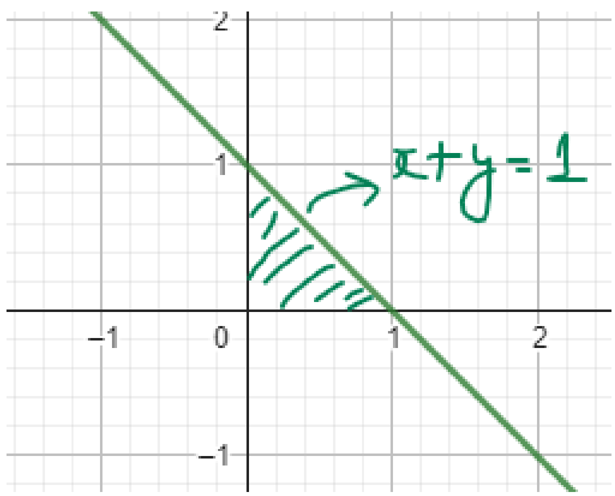
$$\begin{aligned}
V &= \frac{9}{2}\arcsin\frac{2}{3}+\sqrt{5}-\frac{1}{6}(27-5^{3/2}) \\
&= \frac{9}{2}\arcsin\frac{2}{3}+\frac{1}{6}(11\sqrt{5}-27)
\end{aligned}$$

(para detalhes nas integrais veja a observação no final do documento)

(b) Temos S



donde a projeção no plano plano xy positivo será o triângulo determinado por $x + y = 1$ (basta tomar $z = 0$ para obter a projeção em xy) isto é,



$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\ ,\ 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

e a função a ser integrada $z = f(x, y)$ corresponde à

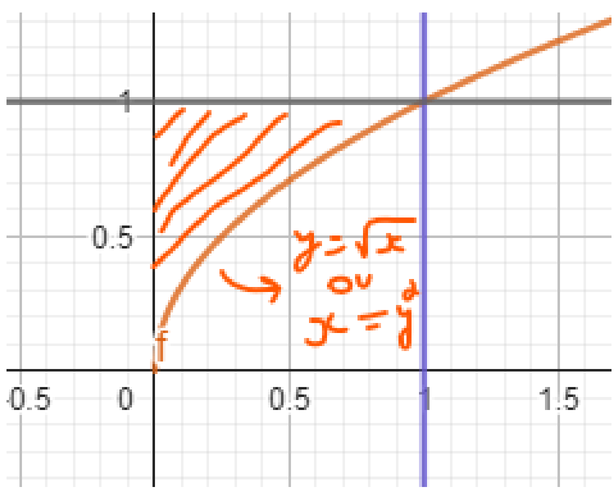
$$x + y + z = 1 \Rightarrow f(x, y) = z = 1 - x - y$$

donde o volume será

$$
\begin{aligned}
V &= \int\int_D 1 - x - y \; dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} 1 - x - y \; dydx \\
&= \int_0^1 y - xy - \frac{1}{2}y^2\Big|_0^{1-x} \; dx \\
&= \int_0^1 (1-x) - x(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2 \; dx \\
&= \int_0^1 1 - x - x + x^2 - \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}x^2 \; dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2 \; dx \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Problema 4. *(a) O domínio será dado pela região*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \;,\; \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$$



Desta forma $0 \leq y \leq 1$ *e invertendo as funções temos*

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$$

e assim invertendo o domínio obtemos

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \ , \ 0 \leq x \leq y^2\}$$

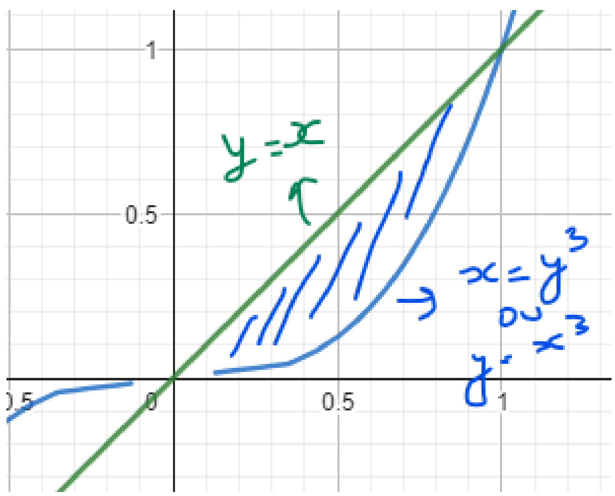
donde

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} \ dydx &= \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{y^3} \ dxdy \\
&= \int_0^1 e^{y^3} x \Big|_0^{y^2} \ dy \\
&= \int_0^1 y^2 e^{y^3} \ dy \\
&= \frac{1}{3} e^{y^3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e-1)
\end{aligned}$$

(b) *Temos como domínio de integração*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \ , \ y \leq x \leq \sqrt[3]{y}\}$$

e invertendo obtemos



$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \ , \ x^3 \leq y \leq x\}$$

donde

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_y^{\sqrt[3]{y}} \sin(x^2) \ dxdy &= \int_0^1 \int_{x^3}^{x} \sin(x^2) \ dydx \\
&= \int_0^1 \sin(x^2) y \Big|_{x^3}^{x} \ dx \\
&= \int_0^1 \sin(x^2)x - \sin(x^2)x^3 \ dx
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sin(x^2)x \ dx \quad &\overset{t=x^2}{=} \quad \int_0^1 \frac{1}{2}\sin t \ dt \\
&= \quad -\frac{1}{2}\cos t\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1-\cos 1)
\end{aligned}$$

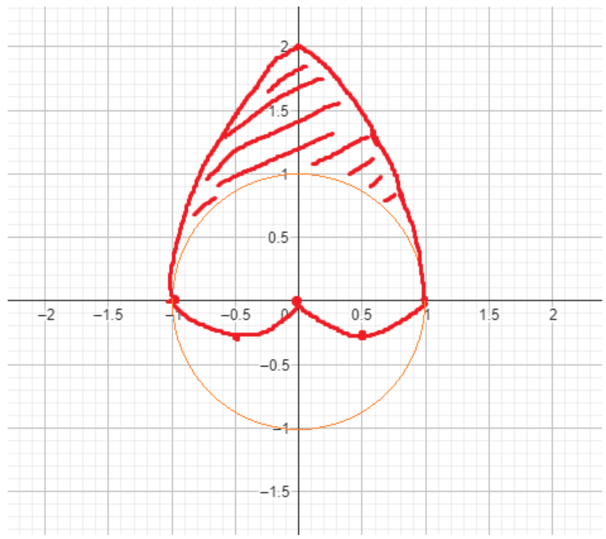
e

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sin(x^2)x^3 \ dx &= \int_0^1 (\sin(x^2)x)\cdot x^2 \ dx \\
&= \int_0^1 (-\frac{1}{2}\cos(x^2))' \cdot x^2 \ dx \\
&= -\frac{1}{2}\cos(x^2)\cdot x^2\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 2x\cos(x^2) \ dx \\
&= -\frac{1}{2}\cos 1 + \frac{1}{2}\sin(x^2)\Big|_0^1 \\
&= -\frac{1}{2}\cos 1 + \frac{1}{2}\sin 1
\end{aligned}$$

donde

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt[3]{y}} \sin(x^2) \ dxdy = \frac{1}{2}(1-\cos 1) + \frac{1}{2}\cos 1 - \frac{1}{2}\sin 1 = \frac{1}{2}(1-\sin 1)$$

Problema 5. *(a) Em coordenadas polares, o cardiodie é dado por*



$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq \pi \ , \ 1 \leq r \leq 1 + \sin\theta\}$$

e com a mudança para coordenadas polares

$$x \mapsto r\cos\theta \ , \ y \mapsto r\sin\theta$$

temos como matriz Jacobiana

$$J_{r,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

donde

$$detJ_{r,\theta} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

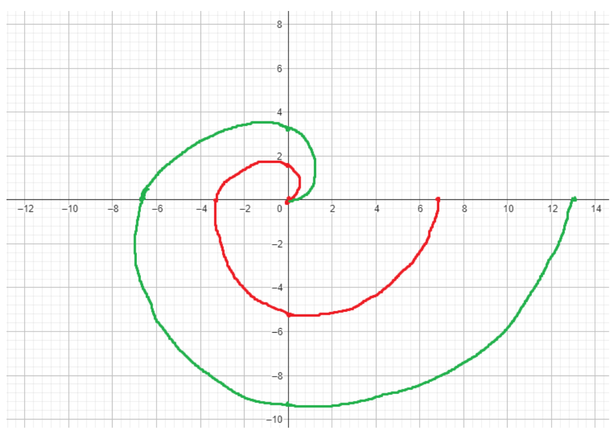
e finalmente

$$
\begin{aligned}
\int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dxdy &= \int_0^{\pi}\int_1^{1+\sin\theta} \frac{1}{\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}} r\ drd\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_1^{1+\sin\theta} \frac{1}{r} r\ drd\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_1^{1+\sin\theta} 1\ drd\theta \\
&= \int_0^{\pi} r\Big|_1^{1+\sin\theta} d\theta \\
&= \int_0^{\pi} 1+\sin\theta-1\ d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \sin\theta\ d\theta \\
&= -\cos\theta|_0^{\pi} = 2
\end{aligned}
$$

(b) O domínio delimitado pelas espirais será

$$D = \{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 : 0\le\theta\le 2\pi\ ,\ \theta\le r\le 2\theta\}$$

donde



$$
\begin{aligned}
\int\int_D (x^2+y^2)\ dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_\theta^{2\theta} ((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2)r\ drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_\theta^{2\theta} r^3\ dr\underset{\cdot}{t}heta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}r^4\Big|_\theta^{2\theta}\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 4\theta^4 - \frac{1}{4}\theta^4\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{15}{4}\theta^4\ d\theta \\
&= \frac{3}{4}\theta^5\Big|_0^{2\pi} = 24\pi^5
\end{aligned}
$$

Observação 1. *Utilizamos as seguintes identidades no Problema 3(a)*

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 x \; dx &= \int \cos x (\sin x)' \; dx \\
&= \cos x \sin x + \int \sin^2 x \; dx \\
&= \frac{1}{2}\sin(2x) + \int 1 - \cos^2 x \; dx \\
&= \frac{1}{2}\sin(2x) + x - \int \cos^2 x \; dx
\end{aligned}$$

donde

$$\int \cos^2 x \; dx = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x$$

Ademais,

$$\sin(2\arcsin\frac{2}{3}) = 2\sin(\arcsin\frac{2}{3})\cos(\arcsin\frac{2}{3})$$

e

$$\sin(\arcsin\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$$

donde

$$\cos^2(\arcsin\frac{2}{3}) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

concluindo

$$\sin(2\arcsin\frac{2}{3}) = 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$