2. Prove, pela definição, que as sequências abaixo são convergentes encontrando seus limites.

(a) $(\frac{5}{n})_{n\in\mathbb{N}}$; (b) $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$; (c) $(\frac{2n}{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$;

Para resolver esse exercício, basta calcular o limite e justificar o valor do limite por meio da definição.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n} = 0$

Agora, queremos provar: $x_n = \frac{5}{n}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$, ou seja:

$a = 0$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{5}{n}\right| < \varepsilon$

Rascunho:

Queremos um n_0 em função de ε, tal que $n > n_0$ satisfaça isso: $\left|\frac{5}{n}\right| < \varepsilon$, para isso, vamos partir dessa inequação para achar esse n_0

$$\left|\frac{5}{n}\right| < \varepsilon \underset{n>0}{\iff} \frac{5}{n} < \varepsilon \iff \frac{5}{\varepsilon} < n$$

Dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 > \frac{5}{\varepsilon}$, logo:

$n > n_0 \Rightarrow n > \frac{5}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon > \frac{5}{n} \Rightarrow \left|\frac{5}{n}\right| < \varepsilon$, como desejado.

4. Prove o teorema da conservação do sinal quando $a_n < 0$.

TEOREMA: Se $\lim_{n\to\infty} a_n = a < 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a_n < 0$ (se uma sequência tem limite negativo, a partir de uma certa ordem todos os seus termos são negativos)

Seja $\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0$.

Pela definição de limite, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon = \frac{|a|}{2}$, logo:

$$-\frac{|a|}{2} < a_n - a < \frac{|a|}{2}$$, como $a < 0$:

$$-\frac{(-a)}{2} < a_n - a < -\frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} + a < a_n < a - \frac{a}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{3a}{2} < a_n < \frac{a}{2} < 0$, logo, $a_n < 0$ a partir de determinado índice.

5. Mostre que se (a_n) converge e $a_n \leq b$ para todo n, então $\lim a_n \leq b$. *Sugestão: Suponha por absurdo que* $\lim a_n > b$ *e use um argumento parecido com o da conservação do sinal para chegar a uma contradição.*
Mostre com um exemplo que mesmo tendo $a_n < b$ não é possível garantir que $\lim a_n < b$.

Temos que $a_n \leq b \ \forall n$, logo, $a_n - b \leq 0$

Seja x_n a sequência tal que $x_n = a_n - b$, então:

$x_n \leq 0 \ \forall n$

$\exists \lim a_n$, pois a_n converge.

Agora, suponha, por absurdo, que $\lim a_n > b$, ou seja:

$(\lim a_n) - b > 0 \Rightarrow \lim (a_n - b) > 0 \Rightarrow \lim x_n > 0$

Desse modo, pelo teorema da conservação do sinal, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n > 0$, logo, $a_n - b > 0 \Rightarrow a_n > b$, contradição, já que $a_n \leq b$ por hipótese.

Portanto $\lim a_n \leq b$.

• Exemplo: $a_n = -\frac{1}{n}$, nesse caso $a_n < 0$ $\forall n$, mas $\lim a_n = 0$.

6. Prove que se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $a \in \mathbb{R}$, então a sequência $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $|a|$. *Sugestão: Use a desigualdade triangular ao contrário.* Dê um contra-exemplo para mostrar que a recíproca é falsa, salvo quando $a = 0$.

Se (a_n) converge para a, então $\lim a_n = a$, logo:

(*) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

Queremos mostrar que $(|a_n|)$ converge para $|a|$, ou seja, basta provar que $\lim |a_n| = |a|$, para isso, devemos mostrar:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n > n_0 \Rightarrow ||a_n| - |a|| < \varepsilon$

Fixe $\varepsilon > 0$, sabemos por (*) que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que: $n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$, agora, basta mostrarmos que:

$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$

$$\begin{cases} (|a_n| - |a|)^2 = |a_n|^2 - 2|a_n||a| + |a|^2 \\ (a_n - a)^2 = a_n^2 - 2a_na + a^2 \end{cases}$$

$(|a_n| - |a|)^2 = |a_n|^2 - 2|a_n||a| + |a|^2 = a_n^2 - 2|a_n||a| - a^2 \leq a_n^2 - 2a_na - a^2$

$= (a_n - a)^2$

Logo: $(|a_n|-|a|)^2 \leq (a_n-a)^2$, ou seja:

$\sqrt{(|a_n|-|a|)^2} \leq \sqrt{(a_n-a)^2} \Rightarrow ||a_n|-|a|| \leq |a_n-a|$

Disso, concluímos que $||a_n|-|a|| \leq |a_n-a| < \varepsilon$, logo:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n > n_0 \Rightarrow |a_n - |a|| < \varepsilon$, ou seja:

$\lim |a_n| = |a|$.

7. Prove que a sequência de termo geral $a_n = \frac{1}{n^2+\text{sen}n+\pi^n}$ converge para zero. *Sugestão: Use o Teorema do Confronto.*

$$a_n = \frac{1}{n^2 + \text{sen}\, n + \pi^n}$$, note que $a_n \geq 0 \;\forall n \in \mathbb{N}$

Além disso:

$$a_n = \frac{1}{n^2 + \text{sen}\, n + \pi^n} \leq \frac{1}{\text{sen}\, n + \pi^n} \leq \frac{1}{\pi^n - 1}$$

Logo: $$0 \leq a_n \leq \frac{1}{\pi^n - 1}$$

$\lim 0 = 0$ e $\lim \frac{1}{\pi^n - 1} = 0$, então, pelo teorema do confronto, temos $\lim a_n = 0$.