Transformações entre Sistemas de Coordenadas

SCC0250 - Computação Gráfica

Profa. Maria Cristina F. Oliveira

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC)
Universidade de São Paulo (USP)

18 de setembro de 2023

Sumário

Sumário

Introdução

- Aplicações de computação gráfica envolvem a transformação de um sistema de coordenadas em outro em vários estágios do processamento da cena

Lembrando

No espaço homogêneo 3D

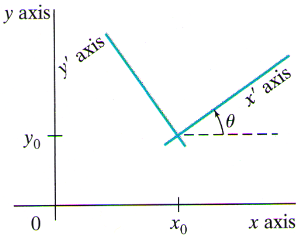
- Um ponto no hiperplano $w = 1$ é descrito como $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 1]$, com α_i valores escalares
- Um vetor é descrito como $v = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, 0]$, com β_i valores escalares

Sumário

Transformações entre Sistemas de Coordenadas

- Para transformar a geometria de uma cena dada em um sistema **Oxy** para outro sistema $\mathbf{O'x'y'}$
  1. Translado (x_0, y_0) para a origem $(0, 0)$
  2. Rotaciono em $-\theta$

$$\mathbf{M}_{xy,x'y'} = \mathbf{R}(-\theta) \cdot \mathbf{T}(-x_0, -y_0)$$



- Essa transformação nos dá a geometria da cena em relação ao novo sistema de referência $\mathbf{x'y'}$ (a cena é a mesma)

Transformações entre Sistemas de Coordenadas

- Uma propriedade importante da matriz de transformação é que a sub-matriz de rotação 2×2 é ortonormal

$$\begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xy} & tr_x \\ r_{yx} & r_{yy} & tr_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Isto é, suas linhas (r_{xx}, r_{xy}) e (r_{yx}, r_{yy}) (ou colunas) definem dois vetores unitários ortogonais (ortonormais)

$$r_{xx}^2 + r_{xy}^2 = r_{yx}^2 + r_{yy}^2 = 1$$

$$r_{xx} \cdot r_{yx} + r_{xy} \cdot r_{yy} = 0$$

Transformações entre Sistemas de Coordenadas

- Isso é facilmente verificado, pois

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta \\ -\operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Transformações entre Sistemas de Coordenadas

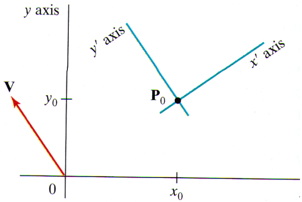
- Assim, se esses vetores forem transformados pela submatriz de rotação, temos
  - (r_{xx}, r_{xy}) é transformado em um vetor unitário na direção do eixo x
  - (r_{yx}, r_{yy}) é transformado em um vetor unitário na direção do eixo y

$$\begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xy} & tr_x \\ r_{yx} & r_{yy} & tr_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{xx} \\ r_{xy} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xy} & tr_x \\ r_{yx} & r_{yy} & tr_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{yx} \\ r_{yy} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Transformações entre Sistemas de Coordenadas

- Essa propriedade é útil porque possibilita outra maneira de derivar a matriz de transformação do sistema $\mathbf{Oxy}$ em $\mathbf{O'x'y'}$
    - Para isso, inicialmente definimos a orientação do sistema de coordenadas $\mathbf{O'x'y'}$ por um vetor $\mathbf{V}$ que dá a direção positiva do eixo y'



Transformações entre Sistemas de Coordenadas

- **V** pode ser especificado como um ponto relativo à origem no sistema de coordenadas **Oxy**, e pode ser normalizado para um vetor unitário **v**

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|} = (v_x, v_y)$$

- dado **v** podemos obter o vetor unitário **u**, ortogonal a **v**, que define a direção do eixo x'

$$\mathbf{u} = (v_y, -v_x) = (u_x, u_y)$$

Transformações entre Sistemas de Coordenadas

- Como qualquer matriz de rotação pode ser expressa por um conjunto de vetores ortonormais, a matriz de rotação que alinha os eixos do sistema $\mathbf{O'x'y'}$ com os eixos do sistema $\mathbf{Oxy}$ pode ser descrita como

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações entre Sistemas de Coordenadas

- Isso porque

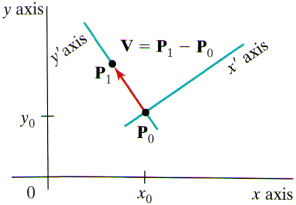
$$\begin{bmatrix} u_x & u_y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Transformações entre Sistemas de Coordenadas

- É possível especificar $\mathbf{V}$ relativo a um ponto $\mathbf{P_0}$ arbitrário no sistema de coordenadas **Oxy**, ao invés de em relação à origem do sistema. Para isso podemos fazer

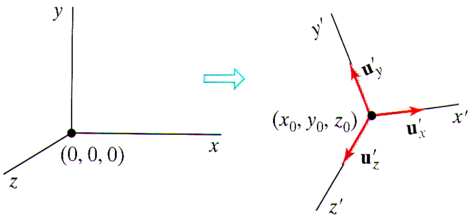
$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{P_1} - \mathbf{P_0}}{|\mathbf{P_1} - \mathbf{P_0}|}$$



Sumário

Transformações entre Sistemas de Coordenadas

- Assim como em 2D, a transformação entre dois sistemas de coordenadas 3D se dá alinhando (i.e., sobrepondo) os sistemas de coordenadas
- Para transformar um sistema de coordenadas Cartesiano $Oxyz$ em outro $O'x'y'z'$, dado que $O'x'y'z'$ é definido em relação a $Oxyz$ fazemos
  1. Transladamos a origem de $O'x'y'z'$ para a origem de $Oxyz$
  2. Executamos uma sequencia de rotações para alinhar os eixos de $Ox'y'z'$ com os eixos de $Oxyz$



Transformações entre Sistemas de Coordenadas

- Nesse exemplo, primeiro a origem de $O'x'y'z'$ é sobreposta à origem de $Oxyz$, o que é feito com a translação

$$\mathbf{T}(-x_0, -y_0, -z_0)$$

- E a matriz de rotação que alinha os eixos pode ser obtida em função dos vetores unitários $\mathbf{u'}_x$, $\mathbf{u'}_y$ e $\mathbf{u'}_z$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} u'_{xx} & u'_{xy} & u'_{xz} & 0 \\ u'_{yx} & u'_{yy} & u'_{yz} & 0 \\ u'_{zx} & u'_{zy} & u'_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Assim, a transformação completa é dada por $\mathbf{R} \cdot \mathbf{T}$