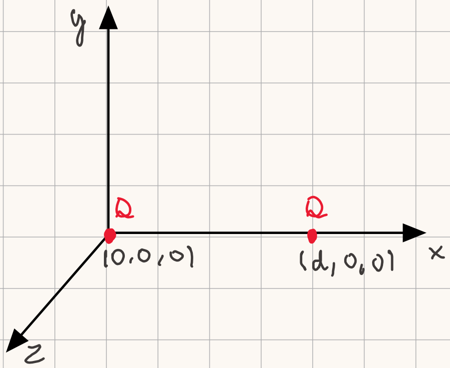
1) Duas cargas pontuais idênticas de Q coulombs separadas por d metros

Primeiramente devemos criar um sistema coordenados

Por conviniência, vamos colocar as cargas ao longo do eixo x, com uma na origem e a outra em x = d



O campo elétrico em um ponto arbitrário P gerado por uma carga pontual posicionada em um ponto R pode ser escrito como:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{|\vec{PR}|^2}\,\frac{\vec{PR}}{|\vec{PR}|}$$

= Valor em coulombs da carga pontual.

= $\vec{PR}$ é o vetor conectando os pontos P e R.

$|\vec{PR}|$ é a magnitude deste vetor, ou seja, a distância entre os pontos. Esse termo nos diz que a magnitude do campo elétrico é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os pontos.

$= \dfrac{\vec{PR}}{|\vec{PR}|}$ é o vetor unitário na direção $\vec{PR}$.

Quando dividimos um vetor pela sua magnitude ele se torna unitário. Esse termo nos diz que $\vec{E}$ tem a mesma direção de $\vec{PR}$.

Vamos aplicar isto ao exercício. Primeiro, consideramos o campo elétrico em um ponto $X = (x, 0, 0)$ gerado pela carga na origem.

$$\vec{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{OX}|^2} \frac{\vec{OX}}{|\vec{OX}|}$$

$$\vec{OX} = (x, 0, 0) - (0, 0, 0) = (x, 0, 0)$$

$$|\vec{OX}| = \sqrt{x^2 + 0^2 + 0^2} = |x|$$

$$\frac{\vec{OX}}{|\vec{OX}|} = \frac{(x, 0, 0)}{|x|} = \begin{cases} (-1, 0, 0), & x < 0 \\ (1, 0, 0), & x > 0 \end{cases}$$

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{1}{x^2} (-\hat{a}_x), & x < 0 \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{1}{x^2} \hat{a}_x, & x > 0 \end{cases}$$

Agora analisamos o campo gerado pela carga em $D = (d, 0, 0)$

$$\vec{E_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{DX}|^2} \frac{\vec{DX}}{|\vec{DX}|}$$

$$\vec{DX} = (x, 0, 0) - (d, 0, 0) = (x-d, 0, 0)$$

$$|\vec{DX}| = \sqrt{(x-d)^2 + 0^2 + 0^2} = |x-d|$$

$$\frac{\vec{DX}}{|\vec{DX}|} = \frac{(x-d, 0, 0)}{|x-d|} = \begin{cases} (-1, 0, 0), & x < d \\ (1, 0, 0), & x > d \end{cases}$$

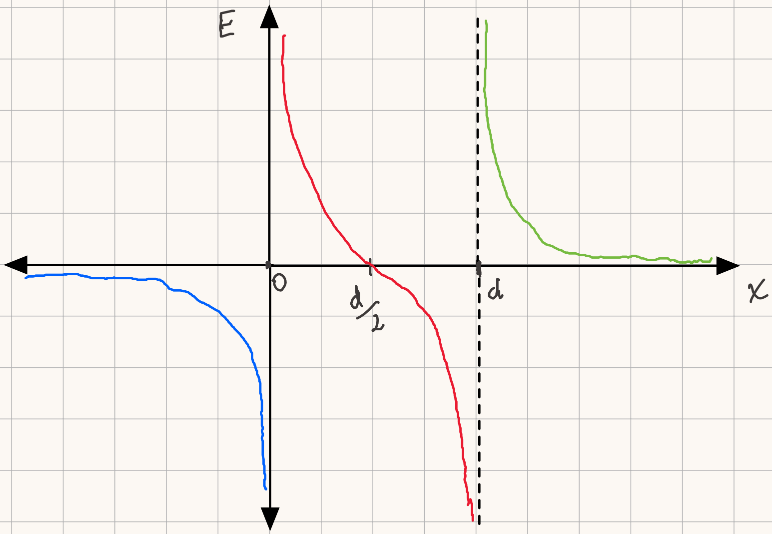
$$\vec{E_2} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(x-d)^2} (-\vec{a}_x), & x < d \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(x-d)^2} \vec{a}_x, & x > d \end{cases}$$

O campo elétrico total é simplesmente a soma dos campos gerados por cada carga

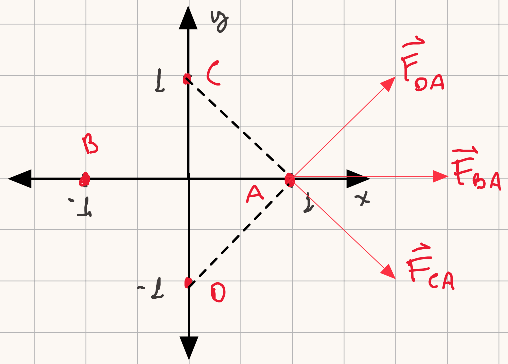
$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$$

Vamos estudar o campo para $x < 0$, $0 < x < d$ e $x > d$.

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{-1}{x^2} - \dfrac{1}{(x-d)^2}\right)\vec{a}_x, & x < 0 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x-d)^2}\right)\vec{a}_x, & 0 < x < d \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x-d)^2}\right)\vec{a}_x, & x > d \end{cases}$$



2)



Pela lei de Coulomb, a força elétrica entre duas cargas pontuais de cargas Q_1 e Q_2 situadas nos pontos P_1 e P_2, respectivamente, e:

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{|\overrightarrow{P_1P_2}|^2} \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{|\overrightarrow{P_1P_2}|}$$

Aplicando isto ao exercicio temos:

$\vec{F}_{CA}$) $\overrightarrow{CA} = (1,0,0) - (0,1,0) = (1,-1,0)$

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{F}_{CA} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2} \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}$$

$\vec{F}_{BA})$ $\vec{BA} = (1,0,0) - (-1,0,0) = (2,0,0)$

$|\vec{BA}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2} = 2$

$$\vec{F}_{BA} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{4} \frac{(2,0,0)}{2}$$

$\vec{F}_{CA})$ $\vec{CA} = (1,0,0) - (0,-1,0) = (1,1,0)$

$|\vec{CA}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

$$\vec{F}_{CA} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2} \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}$$

Para calcular a força total, basta somar os forços de cada carga,

$$\vec{F}_T = \vec{F}_{CA} + \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{DA}$$

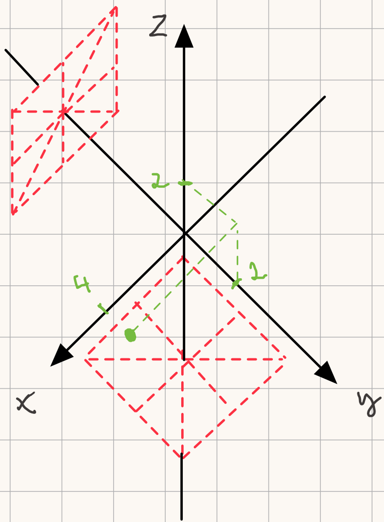
Considerando $Q = 50\,\mu C$, $\pi = 3{,}14$, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ Fm^{-1}$ e os distâncias em metro, temos:

$$\vec{F}_T = 22{,}5 \left[\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{-1}{2\sqrt{2}}, 0 \right) + \left(\frac{1}{4}, 0, 0 \right) + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, 0 \right) \right] N$$

$$\vec{F}_T = 22,5 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} , 0 , 0 \right) N$$

$$\vec{F}_T = 21,5 \, \vec{a}_x \; N$$

3)



Em vermelho estão representados os planos $y = -5$ e $z = -5$
Apenas parte deles está representada, mas eles devem ser imaginados como estendendo-se infinitamente

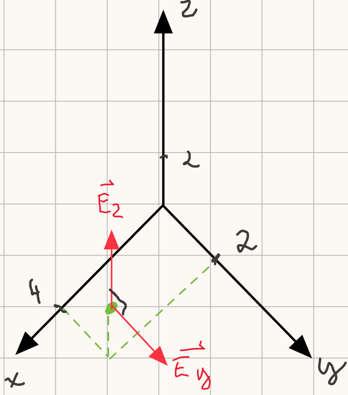
Em verde está representado o ponto $(4, 2, 2)$

Sabemos que o campo elétrico gerado por um plano de densidade de carga uniforme pode ser escrito como.

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{a}_n$$, onde σ é a densidade de carga e $\vec{a}_n$ o vetor unitário normal ao plano

Se σ é positiva, o campo aponta para fora do plano. Se σ é negativa, o campo aponta para dentro. Logo:

$$\vec{E}_y = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(0,1,0)$$



$$\vec{E}_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(0,0,1)$$

$$\vec{E}_{TOTAL} = \vec{E}_y + \vec{E}_z$$

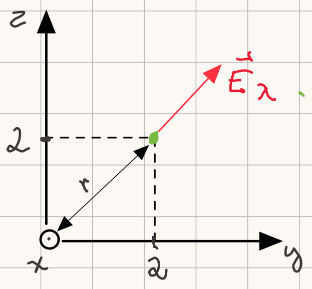
$$\vec{E}_T = \frac{1}{2 \times 8{,}85 \times 10^{-12}} \times \frac{1}{6\pi} \times 10^{-9}\left[(0,1,0)+(0,0,1)\right]$$

$$\vec{E}_T = 3(0,1,1) = (0,3,3)\ V/m$$

O campo elétrico causado por uma linha de densidade de carga uniforme pode ser escrito como:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \times \frac{1}{r} \times \vec{a_r}$$

Onde λ é a densidade linear de carga, r é a distância entre a linha e o ponto considerado e $\vec{a_r}$ é o vetor unitário que aponta da linha ao ponto se $\lambda > 0$ e vice-versa se $\lambda < 0$.



No gráfico acima o eixo x aponta para fora da tela em direção ao leitor, o ponto $(4, 2, 2)$ está representado em verde e a seta vermelha representa o campo elétrico nesse ponto causado por uma linha de carga coincidente ao eixo x.

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\vec{a}_r = \frac{(0,2,2)}{|(0,2,2)|} = \frac{(0,2,2)}{\sqrt{2^2+2^2}} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{E}_\lambda = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ N/m}$$

$$\vec{E}_\lambda = 4{,}5 \times 10^9 \, \lambda \, (0, 1, 1) \text{ N/m}$$

Igualando isto ao campo elétrico causado pelos planos temos:

$$4{,}5 \times 10^9 \, \lambda \, (0, 1, 1) = 3 \, (0, 1, 1)$$

$$4{,}5 \times 10^9 \lambda = 3$$

$$\lambda = \frac{2}{3} \frac{nC}{m}$$