MAE5709 - Introdução aos Processos Estocásticos
Prof. Fábio Machado
Lista de Exercícios 1

1. Suponhamos que numa eleição o candidato **A** obtenha $a$ votos e o candidato **B** obtenha $b$ votos com $a > b$. Mostre que a probabilidade de que $A$ lidere a votação durante toda a contagem é dada por $(a-b)/(a+b)$.

2. Sejam dados $a, b, c$ com $a > c > 0$ e $b > 0$. O número de caminhos que tocam a linha $x = a$ e, então, seguem para o ponto $(n, c)$ sem tocar a linha $x = -b$ é igual a $N_{n,2a-c} - N_{n,2a+2b+c}$. (Observe que esse número inclui os caminhos que tocam a linha $x = -b$ antes de tocarem a linha $x = a$).

3. Nos casinos americanos as roletas tem casas com os inteiros entre 1 e 36, além das casas 0 e 00. Metade das casas com os números diferentes de zero são vermelhos enquanto a outra metade são pretos. As casas 0 e 00 são verdes. Uma aposta comum neste jogo é colocar um dolar no vermelho. Se um número vermelho aparece, o apostador recebe seu dolar de volta além de outro dolar. Se um número preto ou verde aparece, ele perde o dolar.

   (a) Suponha alguem que começa com \$ 40,00 dolares e que aposta continuamente no vermelho até que sua fortuna chegue a \$ 50,00 ou \$0,00. Encontre a probabilidade de que a fortuna chegue a \$ 50,00 dolares.

   (b) Quanto dinheiro tem que começar o jogador, para ter 20 % de chance de ganhar \$10,00 dolares antes de ir a falência?

4. Suponhamos que numa eleição o candidato A obtenha 70 votos e o candidato B obtenha 30. Mostre que a probabilidade de que B lidere a votação por algum período da contagem (sabemos que no final ele irá ser derrotado) é superior a 0,5.

5. Considere um passeio aleatório simples simétrico em $\mathbb{Z}$ partindo da origem. Para $T = \min\{n \geq 1 : S_n = 0\}$, mostre que

$$\mathbb{P}(T = 2n) = \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}2^{-2n}.$$

   Deduza que $\mathbb{E}(T^\alpha) < \infty$ se e somente se $\alpha < \frac{1}{2}$. A fórmula de Stirling pode ser útil: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

6. Mostre que em um passeio aleatório simétrico $S_n$ iniciando em $0$, a distribução de probabilidade do máximo $M_n := \max\{S_j : 0 \leq j \leq n\}$ satisfaz

$$\mathbb{P}(M_n = r) = \mathbb{P}(S_n = r) + \mathbb{P}(S_n = r + 1)$$

7. Considere o passeio aleatório em $\mathbb{Z}^2$, no qual a probabilidade do próximo passo ser dado para a direita ou para a esquerda é $p$ mas para cima ou para baixo é $(1-2p)/2$. Verifique se ele é *transiente* ou *recorrente*.