

Introdução a Física Nuclear (4300406)



Prof. Valdir Guimarães

Instituto de Física

Aula 7 – Momento elétrico e magnético

Poço de potencial infinito:

$$V(x) = \infty \quad x < 0, \quad x > a$$
$$= 0 \quad 0 \leq x \leq a$$

Aplicando as condições de contorno em $x=a$

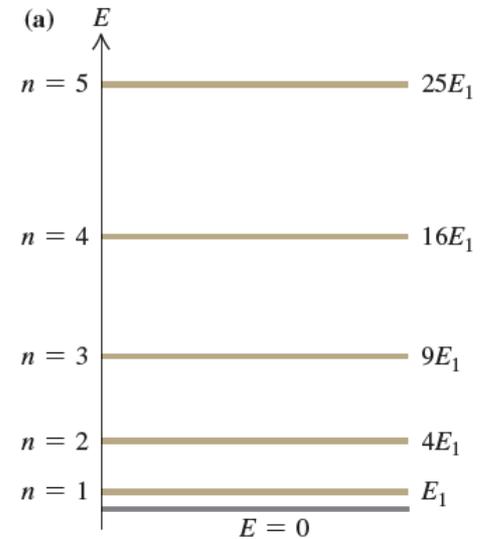
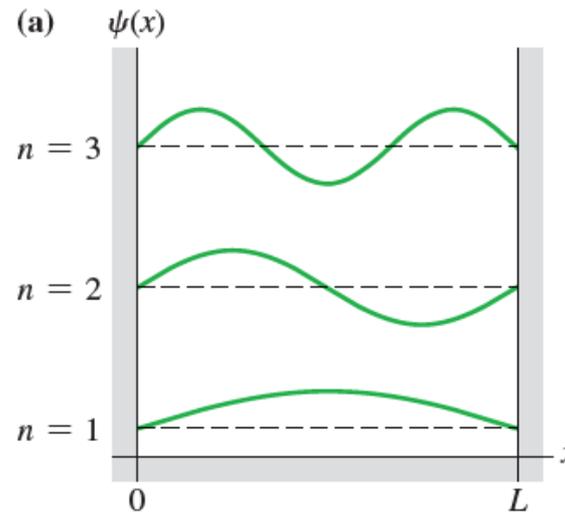
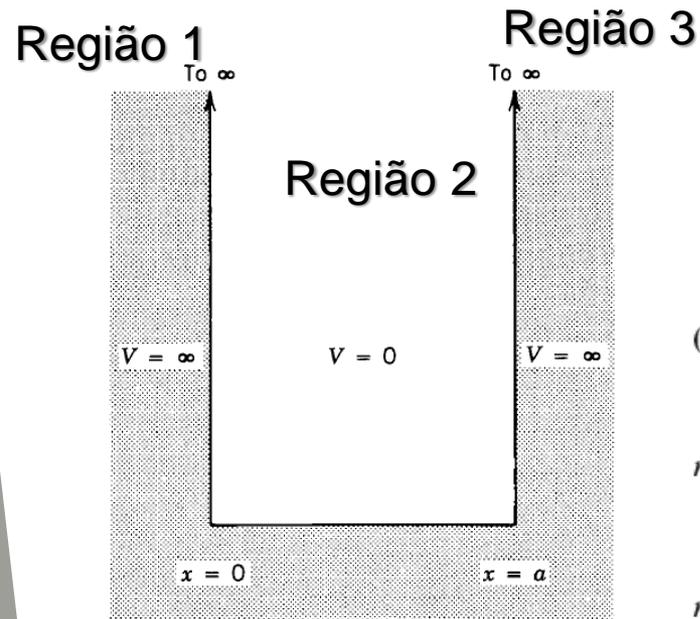
$$\sin ka = 0, \text{ or}$$

$$ka = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$



$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2$$



$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

Poço de potencial finito

Poço de potencial finito:

$$V(x) = V_0 \quad |x| > a/2$$
$$= 0 \quad |x| < a/2$$

Função de onda nas regiões 1 e 3 devem ser iguais.

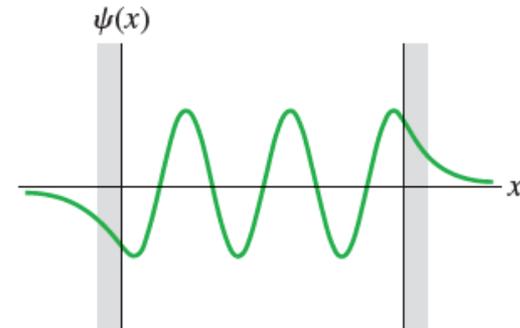
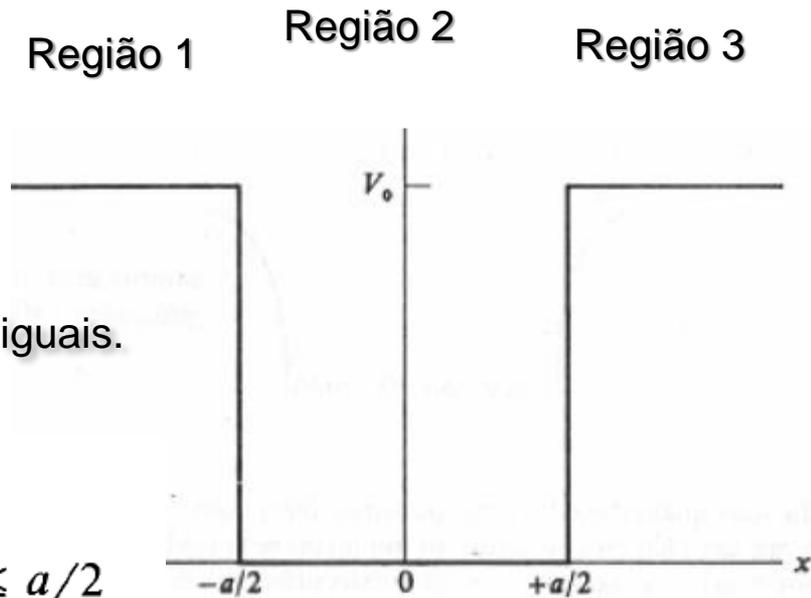
Solução

$$\psi_1 = A e^{k_1 x} + B e^{-k_1 x} \quad x < -a/2$$

$$\psi_2 = C e^{ik_2 x} + D e^{-ik_2 x} \quad -a/2 \leq x \leq a/2$$

$$\psi_3 = F e^{k_1 x} + G e^{-k_1 x} \quad x > a/2$$

$$k_1 = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2} \quad \text{and} \quad k_2 = \sqrt{2mE/\hbar^2}$$



Importante: A função de onda não é nula fora do poço e não se anula na fronteira.

As energias dos estados ligados de um poço infinito é dada por:

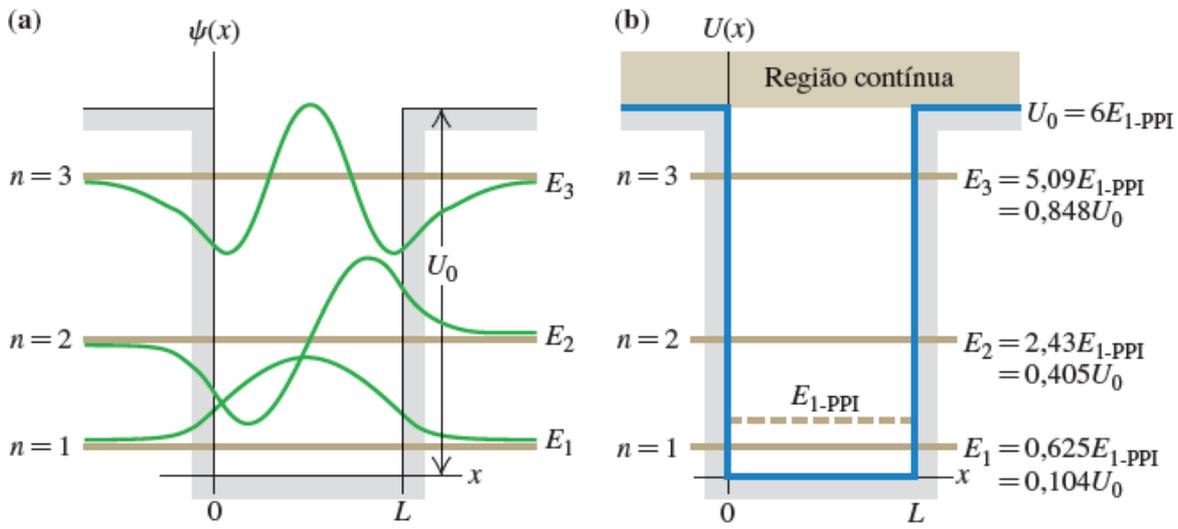
$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2$$

Podemos ter infinitos estados ligados para $n=1, 2, 3, \dots, \infty$

A energia mais baixa é dada para $n=1$

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$

Quando o poço não é muito profundo podemos ter alguns estados ligados e para energia muito grande os estados não são mais ligados.

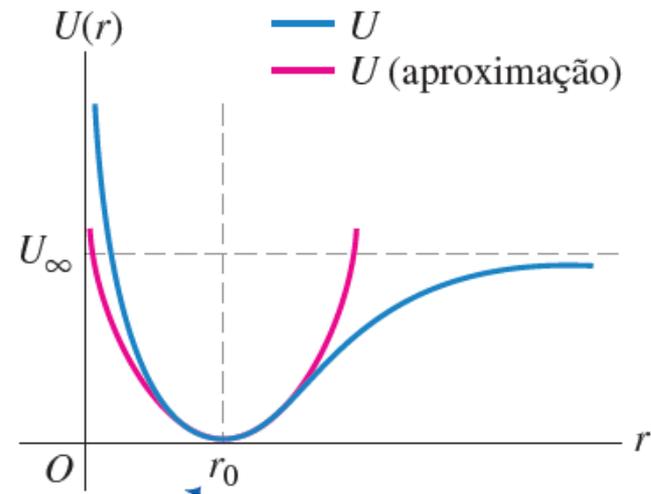


um poço finito possui um número finito de estados ligados em comparação com o número infinito existente no caso de um poço com profundidade infinita.

Poço Oscilador Harmônico

Poço de potencial oscilador harmônico:

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$



$$V(x) = V(a) + (x - a) \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=a} + \frac{1}{2}(x - a)^2 \left(\frac{d^2V}{dx^2} \right)_{x=a} + \dots$$

- ❑ primeiro termo é constante
- ❑ segundo termo nulo em $x=a$ (se for um mínimo)
- ❑ terceiro termo quadrático é o importante.
- ❑ Esse é o termo de oscilador harmônico



$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Solução polinômios de Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

$n = 0$ we have $H_0(x) = 1$

$n = 1$ we have $H_1(x) = 2x$

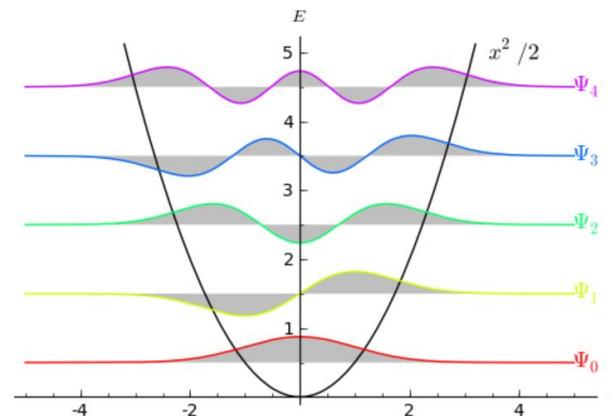
$n = 2$ we have $H_2(x) = 4x^2 - 2$.

Solução para função de onda:

$$E_n = \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\psi_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} H_n(\alpha x) e^{-\alpha^2 x^2 / 2}$$

n	E_n	$\psi_n(x)$
0	$\frac{1}{2} \hbar \omega_0$	$\pi^{-1/4} e^{-\alpha^2 x^2 / 2}$
1	$\frac{3}{2} \hbar \omega_0$	$2^{-1/2} \pi^{-1/4} (2\alpha x) e^{-\alpha^2 x^2 / 2}$
2	$\frac{5}{2} \hbar \omega_0$	$2^{-3/2} \pi^{-1/4} (4\alpha^2 x^2 - 2) e^{-\alpha^2 x^2 / 2}$
3	$\frac{7}{2} \hbar \omega_0$	$(1/4\sqrt{3} \pi^{1/4}) (8\alpha^3 x^3 - 12\alpha x) e^{-\alpha^2 x^2 / 2}$
4	$\frac{9}{2} \hbar \omega_0$	$(1/8\sqrt{6} \pi^{1/4}) (16\alpha^4 x^4 - 48\alpha^2 x^2 + 12) e^{-\alpha^2 x^2 / 2}$



- ❑ Para potenciais centrais do tipo $V=V(r)$ é interessante utilizarmos as coordenadas esféricas.

Potencial partícula livre



$$V(r) = 0$$

Potencial poço esférico:



$$V(r) = 0 \quad r < a$$
$$= \infty \quad r > a$$

Potencial oscilador harmônico:



$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2$$

Potencial Coulombiano:



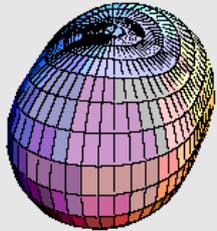
$$V(r) = -Ze^2/4\pi\epsilon_0r.$$

Potencial Woods-Saxon



$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)}$$

Nucleo pode girar.



- ❑ Spin e momento angular são grandezas relacionadas a rotação.
- ❑ Para estudar o efeito da rotação e momento angular devemos então considerar a solução quântica nas três dimensões em coordenadas esféricas.

- ❑ Para potenciais centrais do tipo $V=V(r)$ é interessante utilizarmos as coordenadas esféricas.

Potencial partícula livre



$$V(r) = 0$$

Potencial poço esférico:



$$V(r) = 0 \quad r < a$$
$$= \infty \quad r > a$$

Potencial oscilador harmônico:



$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2$$

Potencial Coulombiano:



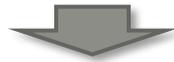
$$V(r) = -Ze^2/4\pi\epsilon_0 r.$$

Potencial Woods-Saxon



$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] + V(x, y, z) \psi(x, y, z) = E \psi(x, y, z)$$

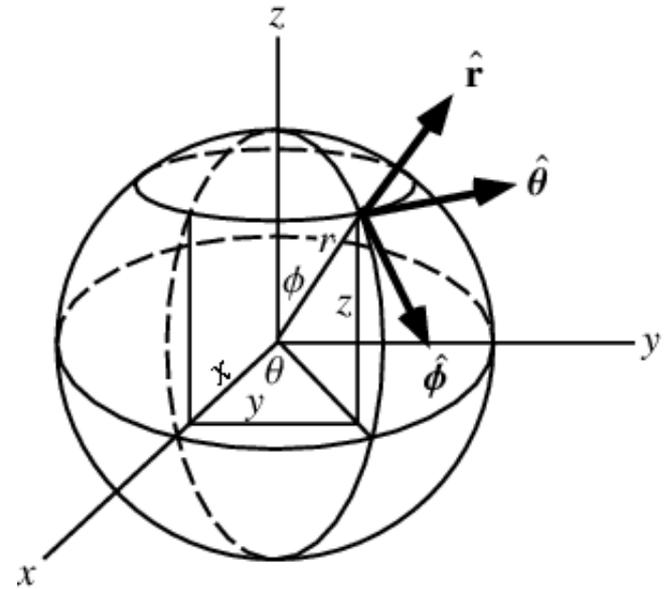


$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi + V(x, y, z) \psi(x, y, z) = E \psi(x, y, z)$$

em que ∇^2 é o operador *laplaciano*.

Considerando o laplaciano em coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}$$



Ficamos com a equação de Schrodinger em coordenadas esféricas:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) + V(r) \right] \psi(r, \theta, \phi) = E \psi(r, \theta, \phi)$$

Solução coordenadas esféricas

Como resolver a equação?

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) + V(r) \right] \psi(r, \theta, \phi) = E \psi(r, \theta, \phi)$$

Podemos considerar como na caixa quadrada que a solução em cada coordenada é independente

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

Podemos primeiramente separar apenas a parte radial da parte angular

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) \underbrace{Y(\theta, \phi)}$$

Harmônicos esféricos

Substituindo essa separação na equação de Schrodinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} + V(r) = E - \frac{1}{2m} \frac{1}{Y(\theta, \phi)} \hat{L}^2 Y(\theta, \phi)$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$$

Equação com as variáveis separadas

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR(r)}{dr} + V(r) = E - \frac{1}{2m} \frac{1}{Y(\theta, \phi)} \hat{L}^2 Y(\theta, \phi)$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$$

A única forma de termos uma igualdade como acima, com variáveis diferentes, é que ambas sejam iguais a uma constante.

Podemos então obter duas equações separadas, onde α é uma constante.

Parte radial:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} + V(r) = E - \frac{1}{2m} \alpha$$

$$\alpha = \ell(\ell + 1)$$

$$\hat{L}^2 = \langle \ell^2 \rangle = \hbar^2 \ell(\ell + 1)$$

Parte angular:

$$-\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y(\theta, \phi) = \alpha Y(\theta, \phi)$$

Parte angular:

$$-\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y(\theta, \phi) = \alpha Y(\theta, \phi)$$

Parte angular com $\alpha \rightarrow \alpha/\hbar^2$.

$$-\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y(\theta, \phi) = \alpha Y(\theta, \phi)$$

Podemos usar novamente a ideia de separação de variáveis $Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta) \Phi(\phi)$



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi(\phi) = A \Phi(\phi), \\ \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} + \frac{A}{\sin^2 \theta} \right] \Theta(\theta) = -\alpha \Theta(\theta) \end{array} \right.$$

Solução para F

Solução para Φ

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \Phi(\phi) = A\Phi(\phi) \quad \Rightarrow \quad \Phi(\phi) = \text{Const.} e^{\pm\sqrt{A}\phi}$$

É interessante notar que a solução é periódica: $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$

Isso implica que: $e^{\pm 2\pi\sqrt{A}} = 1$ com $\sqrt{A} = im$ $\Rightarrow A = -m^2$

A deve ser um número inteiro não positivo.

Podemos aplicar o operador L_z na solução: $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} = L_z \quad \Rightarrow \quad L_z \Phi = \underbrace{\pm \hbar \sqrt{A}}_{\pm \hbar m} \Phi$

Isso implica que o terceiro componente (projeção no eixo z) do momento angular L_z é quantizado e múltiplo de \hbar .

É claro que o eixo z pode ser arbitrariamente definido e isso significa que uma das projeções do momento angular é múltiplo de \hbar .

Vamos chamar essa componente de m_l

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell.$$

Solução para Φ devidamente normalizada

$$\Phi_{m_l}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l\phi}$$

Solução para θ

Solução para Θ

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} + \frac{A}{\sin^2 \theta} \right] \Theta(\theta) = -\alpha \Theta(\theta)$$

$$\text{Com } A = -m^2 \quad \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta(\theta) = -\alpha \Theta(\theta)$$

Fazendo $\alpha = \ell(\ell + 1)$ as soluções são dadas pelos polinômios associados de Legendre

$$\Theta_{\ell m_\ell}(\theta) = \left[\frac{2\ell + 1}{2} \frac{(\ell - m_\ell)!}{(\ell + m_\ell)!} \right]^{1/2} P_\ell^{m_\ell}(\theta)$$

Onde temos as condições: $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$ | $m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$.

Isso implica que o momento angular a e projeção z do momento angular são quantizados

Momentos angulares quânticos.

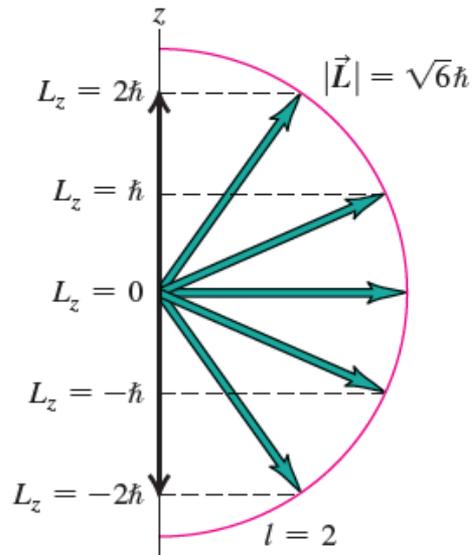
m_l é o número quântico magnético

l é o número quântico orbital

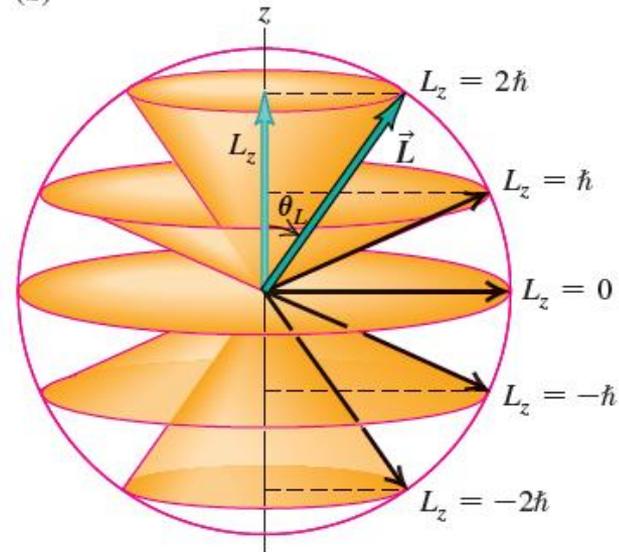
$$L_z = m_l \hbar \quad (m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l)$$

Como esses números só podem assumir valores inteiros, essas grandezas são quantizadas

(a)



(b)



$$\langle l^2 \rangle = \hbar^2 l(l+1)$$

Valor esperado para o momento angular ao quadrado

Quando $l = 2$,

$$L = \sqrt{2(2+1)} \hbar = \sqrt{6} \hbar = 2,45 \hbar$$

$$L_z = 2 \hbar$$

Equação de Schrodinger sendo que $V(r)$ é um potencial central

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) + V(r) \right] \psi(r, \theta, \phi) = E \psi(r, \theta, \phi)$$

Solução radial e angular $\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y(\theta, \phi)$

Parte radial:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} + V(r) = E - \frac{1}{2m} \alpha$$

Parte angular:

$$-\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y(\theta, \phi) = \alpha Y(\theta, \phi)$$

Se $\alpha = l(l + 1)$ Solução angular são os Harmônicos esféricos

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l + 1}{4\pi} \frac{(l - m)!}{(l + m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi)$$

Polinômios de Legendre

No entanto, para nós o interessante é a combinação das soluções de Θ e Φ que são os harmônicos esféricos:

harmônicos esféricos:

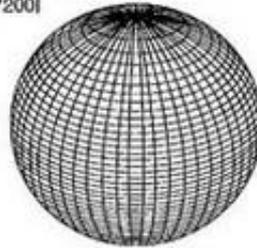
$$Y_{\ell m_\ell}(\theta, \phi) = \Theta_{\ell m_\ell}(\theta) \Phi_{m_\ell}(\phi) \quad \rightarrow \quad Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi)$$

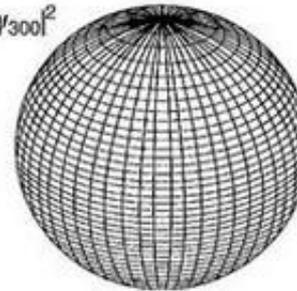
ℓ	m_ℓ	$Y_{\ell m_\ell}(\theta, \phi) = \Theta_{\ell m_\ell}(\theta) \Phi_{m_\ell}(\phi)$
0	0	$(1/4\pi)^{1/2}$
1	0	$(3/4\pi)^{1/2} \cos \theta$
1	± 1	$\mp (3/8\pi)^{1/2} \sin \theta e^{\pm i\phi}$
2	0	$(5/16\pi)^{1/2} (3 \cos^2 \theta - 1)$
2	± 1	$\mp (15/8\pi)^{1/2} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}$
2	± 2	$(15/32\pi)^{1/2} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}$

Representação dos orbitais.

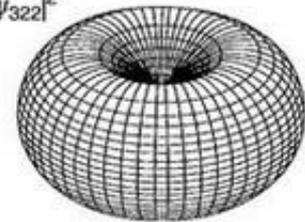
$|\Psi_{200}|^2$



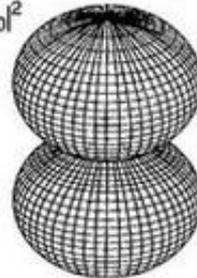
$|\Psi_{300}|^2$



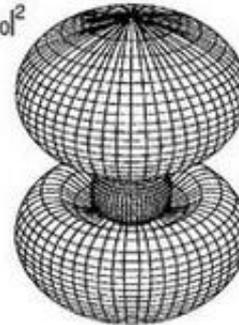
$|\Psi_{322}|^2$



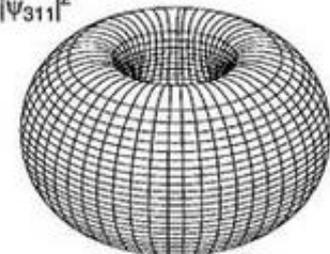
$|\Psi_{210}|^2$



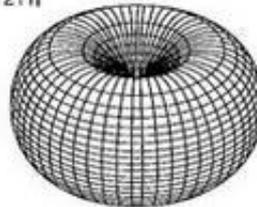
$|\Psi_{310}|^2$



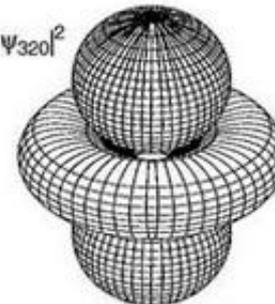
$|\Psi_{311}|^2$



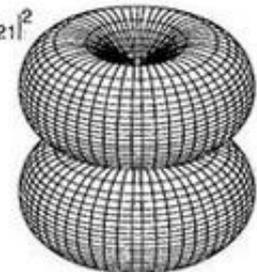
$|\Psi_{211}|^2$



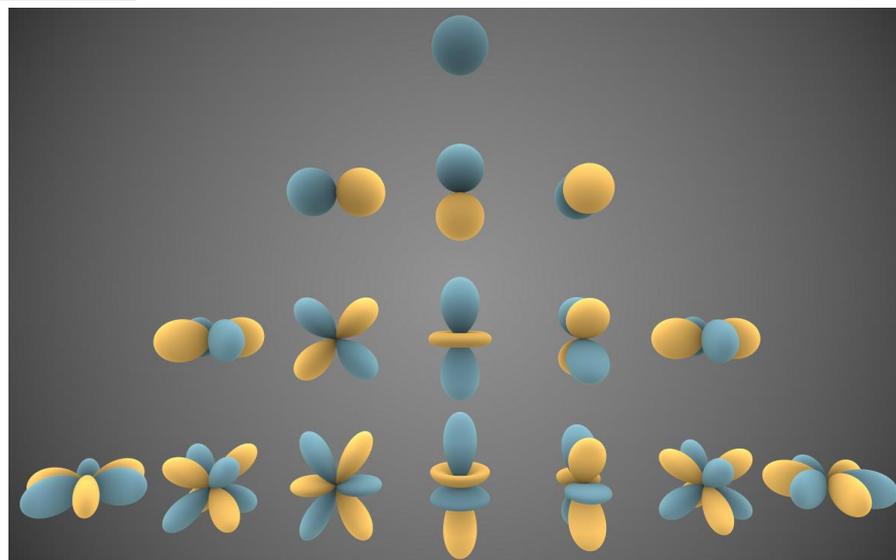
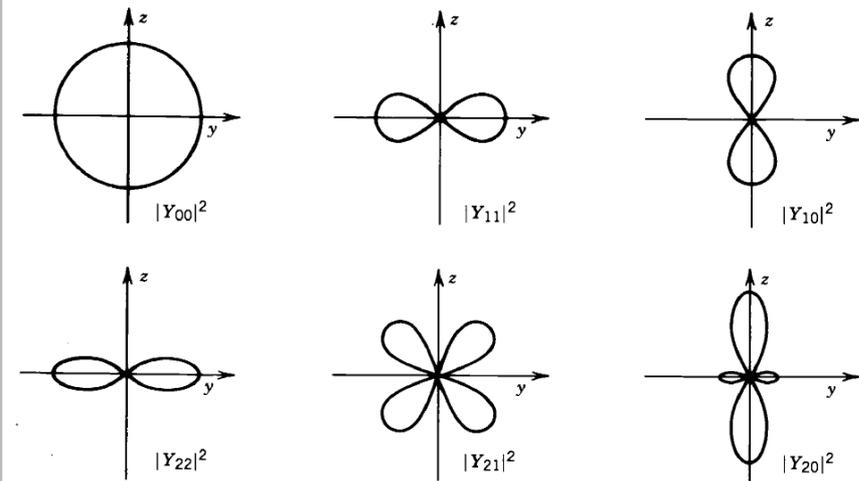
$|\Psi_{320}|^2$



$|\Psi_{321}|^2$



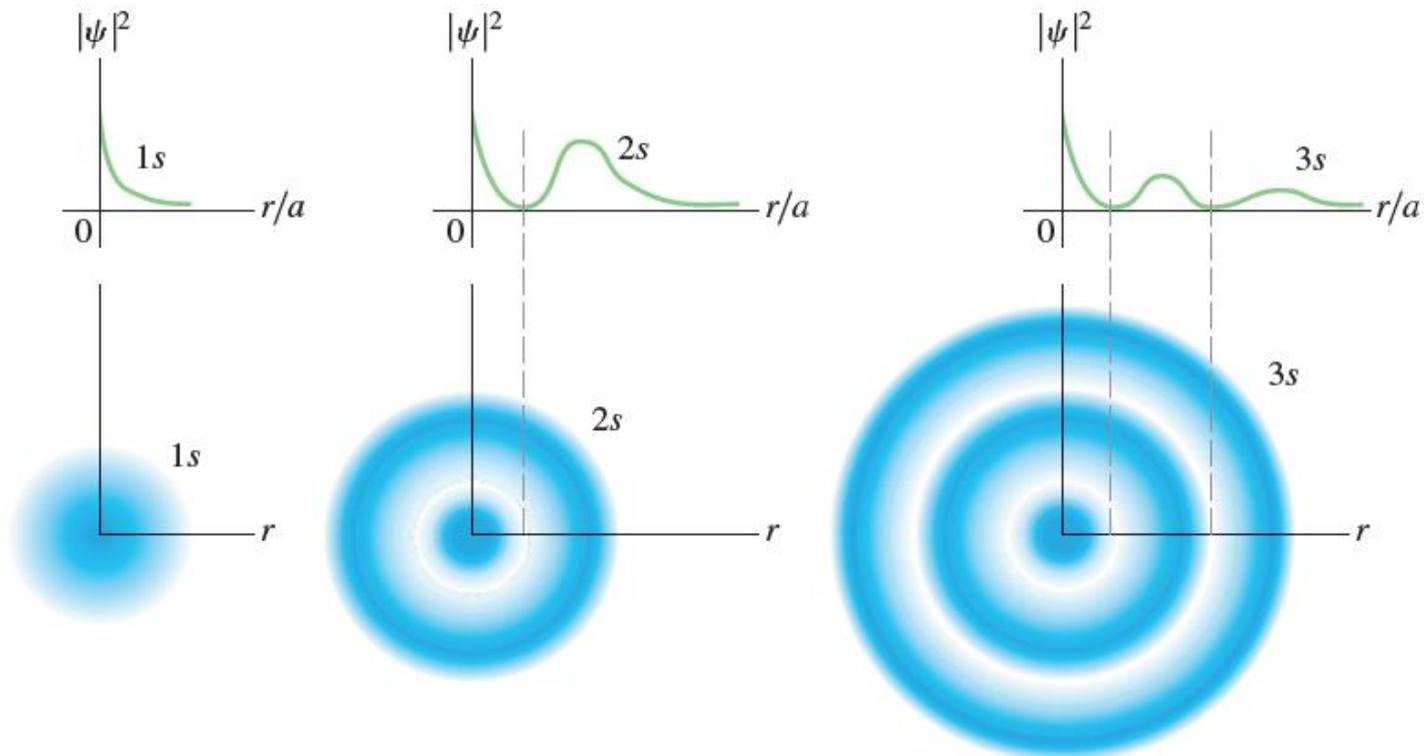
Representation of $\Psi_{nlm}(r, \theta, \phi)$



Representações visuais dos primeiros harmônicos esféricos. Partes em azul e amarelo representam, respectivamente, as regiões nas quais a função é positiva e negativa.

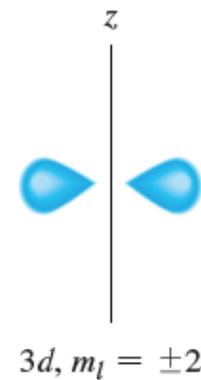
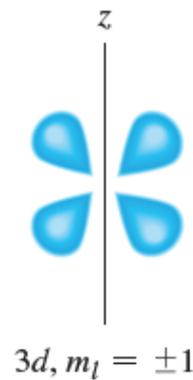
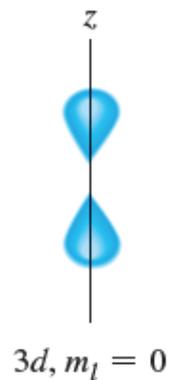
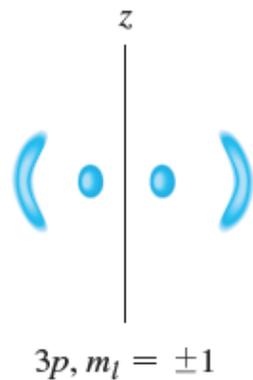
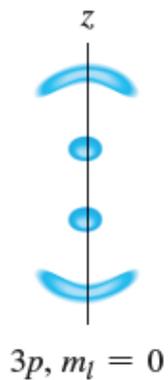
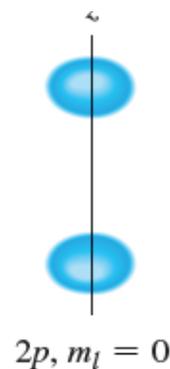
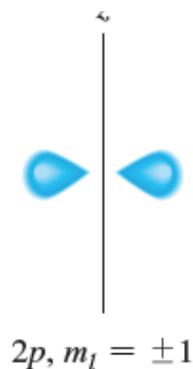
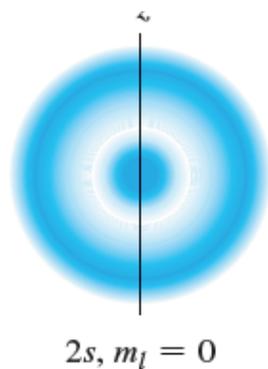
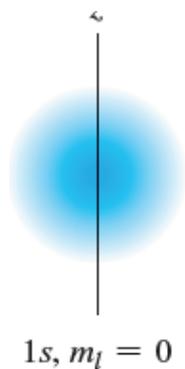
Função de distribuição de probabilidade radial para orbitais com $l = 0$

(simetria esférica)



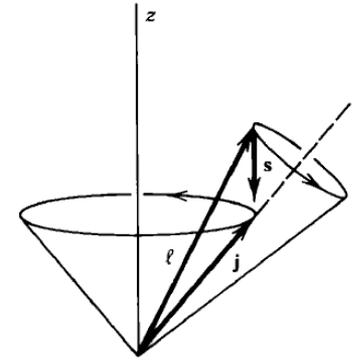
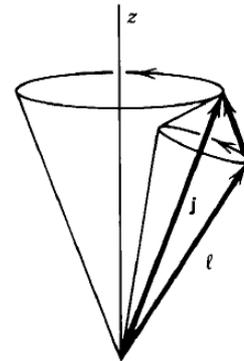
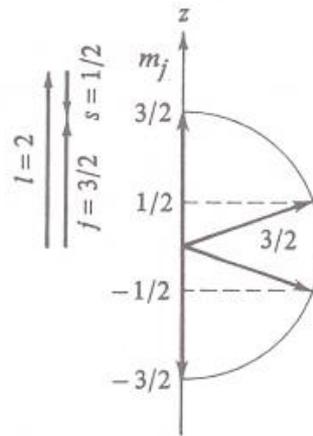
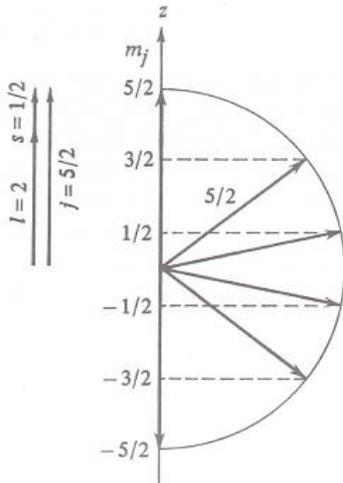
Função de distribuição de probabilidade radial para orbitais com $l = 0, 1, 2$

(simetria esférica)



Núcleo tem spin

- ❑ nucleons possuem spins $s = \frac{1}{2} \hbar$
- ❑ Devemos então esperar que um núcleo com muitos prótons e nêutrons terão uma combinação final de spin (soma de todos os spins individuais).
- ❑ Devemos ainda combinar esse momento de spin total com o momento angular do núcleo para gerar o momento angular total J
- ❑ A soma é vetorial: $\mathbf{j} = \boldsymbol{\ell} + \mathbf{s}$
- ❑ Para L=2 $j = \ell + \frac{1}{2} = 5/2$ ou $j = \ell - \frac{1}{2} = 3/2$



$$m_j = -j, -j+1, \dots, j-1, j$$

Spin e momento angular

l_i Momento angular de um nucleon (i)

s_i Spin do nucleon (i)

j_i Momento angular total de um nucleon

\vec{L} Soma do momento angular de todos nucleons no núcleo

\vec{S} Soma dos spins de todos nucleons no núcleo.

O momento angular total do núcleo seria então dado por:

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^A (\vec{l}_i + \vec{s}_i) = \vec{L} + \vec{S}$$

Devemos lembrar que em mecânica quântica:

$$\langle \vec{I}^2 \rangle = \hbar^2 I(I + 1)$$

$$I = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

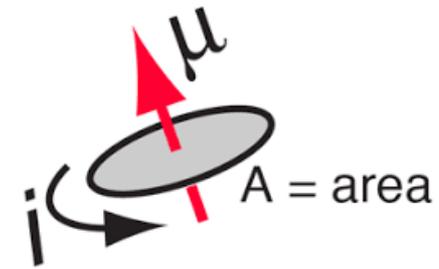
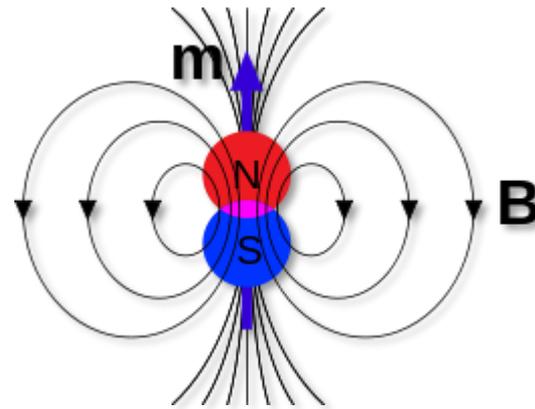
$$\langle I_z \rangle = \hbar m_I$$

$$m_I : -I \leq m_I \leq I$$

- ❑ Como vimos: se a força nuclear for completamente central, $V(\vec{x}) = V(r)$ então, L , m_L , S e m_S são constantes do movimento.
- ❑ Na física atômica e na física nuclear a força spin-orbita tem a forma: $V_{so}(r)\vec{l} \cdot \vec{s}$. elétrons girando nos átomos criam campos magnéticos que afetam os níveis de energia. Esse efeito é pequeno mas o suficiente para produzir um desdobramento das linhas espectroscópicas (chamada estrutura fina).
- ❑ A força spin-spin da forma: $V_{ss}(r)\vec{s} \cdot \vec{s}$. também é muito pequena nos átomos e também provoca um pequeno desdobramento das linhas (estrutura hiperfina).
- ❑ Nos núcleos essas forças são fortes e não pode ser tratadas como pequenas perturbações e L , S , m_L e m_S não são constantes do movimento.
- ❑ No entanto, como iremos observar o momento angular total I é constante nos núcleos e para núcleos par-par $I=0$ (devido a forte força de emparelhamento).

Momento de dipolo e quadrupolo magnético

Momento de dipolo magnético

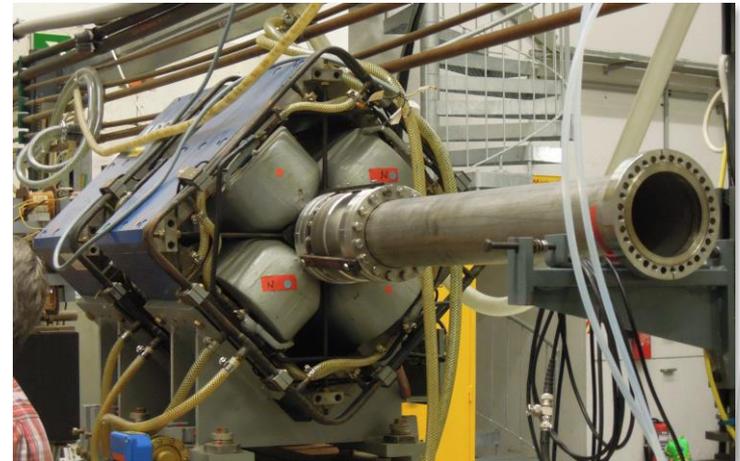
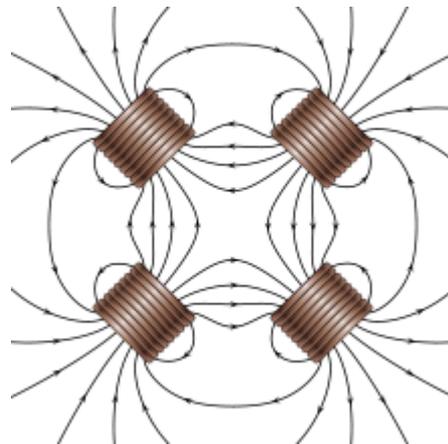
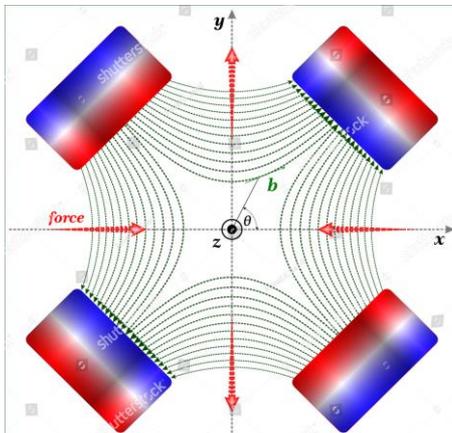


$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int d\vec{x} \vec{x} \times \vec{J}(\vec{x})$$

Densidade de corrente

Quadrupolo magnético

Usado para focalizar feixes de partículas:

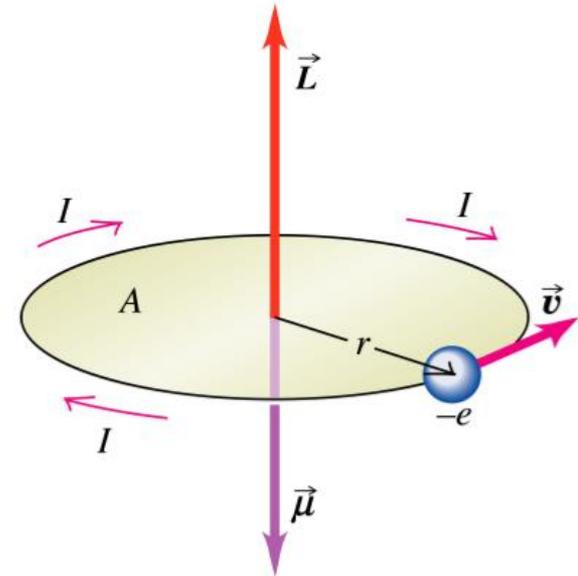


□ Existe uma relação entre momento magnético e momento angular.

$$\mu = I \cdot A = \frac{ev}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{evr}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ L &= mvr \end{aligned} \right\} \mu = \frac{e}{2m} L$$

Momento de dipolo magnético clássico $\mu = \frac{e}{2m} L$



Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

Na mecânica quântica o momento de dipolo é a projeção do momento angular no eixo z

$$\mu = \frac{e}{2m} m_l \hbar \quad \Rightarrow \quad \vec{\mu} = -\frac{g_l \mu_b}{\hbar} \vec{L} \quad \text{com} \quad \mu_b = \frac{e\hbar}{2m}$$

g_l é o fator g-orbital ou fator giromagnético e μ_b é o magneton de Bohr.

Se substituirmos a massa m pela massa do próton teremos o magneton nuclear que seria a unidade básica do momento de dipolo magnético nuclear

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$$

Podemos ter o momento magnético devido a um movimento orbital mas também um momento magnético devido aos spins intrínsecos dos prótons e nêutrons.

$$\mu_S = \mu_N g_S \frac{s}{\hbar}$$

Nesse caso se $s = \frac{1}{2}$ então devemos esperar que $g_s = 2$.

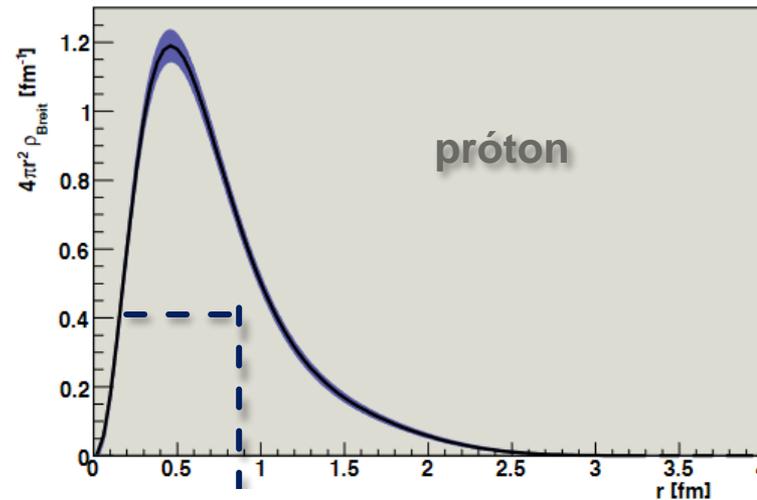
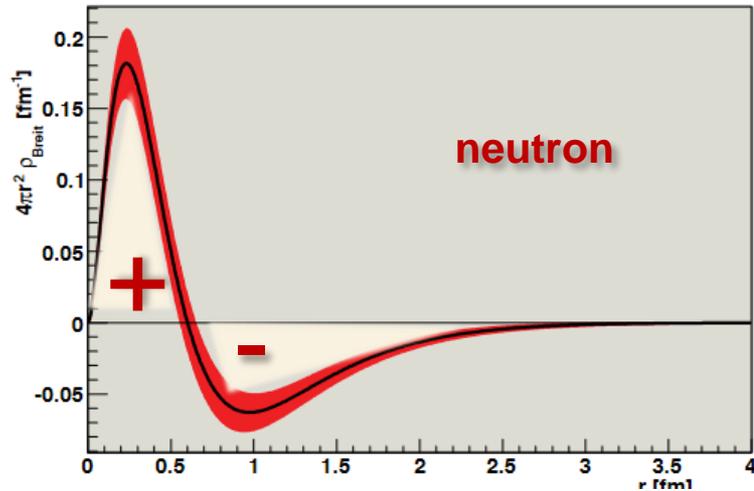
No entanto, os valores obtidos experimentalmente para os fatores giromagnéticos do próton e nêutrons são: $g_S = 5,5856$ (próton) $g_S = -3,8262$ (nêutron)

Particle	Symbol	g-factor
electron	g_e	-2.002 319 304 362 56(35)
muon	g_μ	-2.002 331 8418(13)
muon - (theory-June2020)	g_μ	-2.002 331 836 20
muon - (experiment-fermilab-2021)	g_μ	-2.002 331 840 80
neutron	g_n	-3.826 085 45(90)
proton	g_p	+5.585 694 6893(16)

- ❑ O anômalo momento para o próton foi observado por Stern em 1933, o que lhe garantiu o prêmio Nobel em 1943.
- ❑ A previsão do momento magnético do elétron pela QED é considerado um dos mais marcantes sucesso da física teórica

Distribuição de carga dos nucleons

- ❑ Não existe uma teoria para determinar o fator-g dos nucleons.
- ❑ Os fatores-g anômalos para o próton e nêutrons é devido a distribuição de carga.



The Frontiers of Nuclear Science, A Long Range Plan, pg 26

- ❑ Isso claramente indica que o nêutron e o próton devem ter uma estrutura complexa de carga.
- ❑ Isso levou ao descobrimento que os prótons e nêutrons são compostos por quarks e desencadeando o desenvolvimento da QCD.

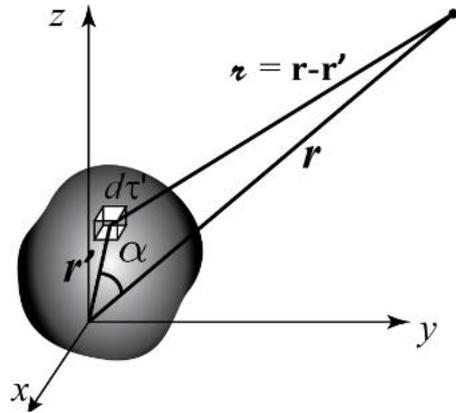
Table 3.2 Sample Values of Nuclear Magnetic Dipole Moments

Nuclide	$\mu(\mu_N)$
n	-1.9130418
p	+2.7928456
^2H (D)	+0.8574376
^{17}O	-1.89379
^{57}Fe	+0.09062293
^{57}Co	+4.733
^{93}Nb	+6.1705

All values refer to the nuclear ground states; uncertainties are typically a few parts in the last digit. For a complete tabulation, see V. S. Shirley, in *Table of Isotopes* (Wiley: New York, 1978), Appendix VII.

- ❑ O momentos angulares totais para esses núcleos são:
- ❑ $I^\pi \Rightarrow p, n = \frac{1}{2}^+, \text{}^2\text{H}_1 = 1^+, \text{}^{17}\text{O}_9 = \frac{5}{2}^+, \text{}^{57}\text{Fe}_{31} = \frac{1}{2}^-, \text{}^{57}\text{Co}_{30} = \frac{7}{2}^-, \text{}^{93}\text{Nb}_{52} = \frac{9}{2}^+$
- ❑ Os sinais + e - se referem a paridade -> discutiremos mais para frente

Potencial elétrico de uma distribuição de carga



potencial elétrico devido uma distribuição de carga:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{z} d\tau'$$

$$z^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\alpha$$

$$z^2 = r^2 \left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\alpha \right]$$

$$z = r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)\left(\frac{r'}{r} - 2\cos\alpha\right)}$$

$$z = r\sqrt{1 + \epsilon}$$

Usando a definição que:

$$\epsilon \equiv \left(\frac{r'}{r}\right)\left(\frac{r'}{r} - 2\cos\alpha\right)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(1 + \epsilon)^{-1/2}$$

Expandindo em série de Taylor

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \frac{5}{16}\epsilon^3 + \dots \right)$$

Expansão em multipolos

$$= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right) \left(\frac{r'}{r} - 2\cos\alpha \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{r'}{r} - 2\cos\alpha \right)^2 - \frac{5}{16} \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \left(\frac{r'}{r} - 2\cos\alpha \right)^3 + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right) (\cos\alpha) + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 (3\cos^2\alpha - 1)/2 - \left(\frac{r'}{r} \right)^3 (5\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)/2 + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos\alpha)$$

Polinômio de Legendre



Expansão em multipolos

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{z} d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{(n+1)}} \int (r')^n P_n(\cos\alpha) \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \rho(\mathbf{r}') d\tau'}_{\text{Monopolo elétrico}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int r' (\cos\alpha) \rho(\mathbf{r}') d\tau'}_{\text{dipolo elétrico}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int (r')^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2\alpha - \frac{1}{2} \right) \rho(\mathbf{r}') d\tau'}_{\text{quadrupolo elétrico}} + \dots$$

Monopolo elétrico
 $(\sim \frac{1}{r^1})$

dipolo elétrico
 $(\sim \frac{1}{r^2})$

quadrupolo elétrico
 $(\sim \frac{1}{r^3})$

Momento de quadrupolo

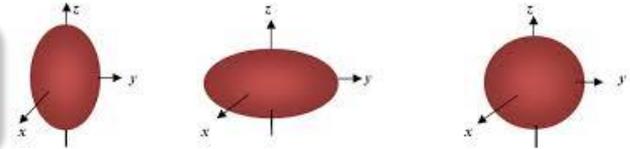
$$V_{\text{mono}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int \rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int r'(\cos\alpha)\rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$V_{\text{quad}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int (r')^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2\alpha - \frac{1}{2} \right) \rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{2r^3} \right)$$

Momento de quadrupolo

$$Q = \int d\vec{r} (3z^2 - r^2) \rho(\vec{r})$$



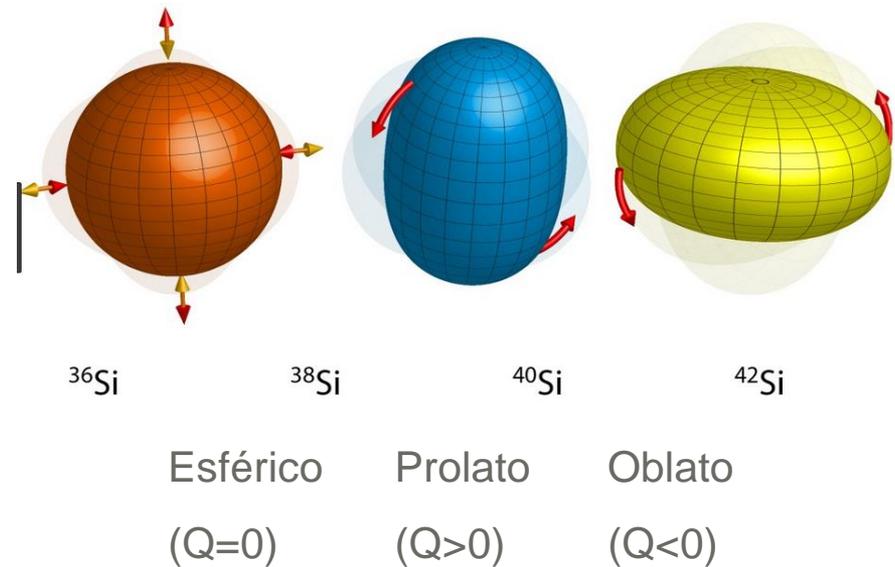
- ❑ Nessa expressão do momento de quadrupolo, o eixo “z” foi escolhido como eixo principal. (r' está alinhado com z').
- ❑ Quando a direção não pode ser escolhida o momento de quadrupolo é dado pela expressão tensorial: $Q_{ij} = \int d\vec{r} (3x'_i x'_j - \delta_{ij} |\vec{x}'|^2) \rho(\vec{r})$
- ❑ Pela mecânica quântica esse momento de quadrupolo seria dado por:

$$Q = \int d\vec{x} \psi_N^*(\vec{x}) (3z^2 - r^2) \psi_N(\vec{x})$$

Table 3.3 Some Values of Nuclear Electric Quadrupole Moments

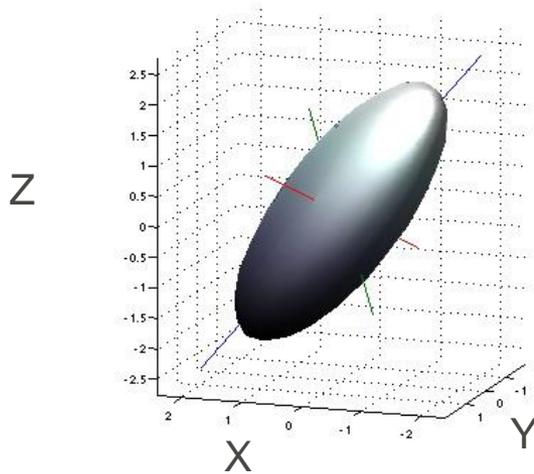
Nuclide	Q (b)
^2H (D)	+0.00288
^{17}O	-0.02578
^{59}Co	+0.40
^{63}Cu	-0.209
^{133}Cs	-0.003
^{161}Dy	+2.4
^{176}Lu	+8.0
^{209}Bi	-0.37

All values refer to nuclear ground states; uncertainties are typically a few parts in the last digit. For a complete tabulation, see V. S. Shirley, in *Table of Isotopes* (Wiley: New York, 1978), Appendix VII.



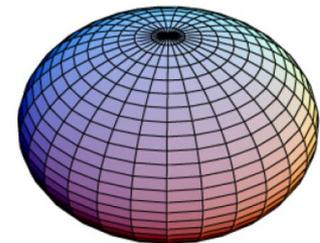
Deformação com simetria axial

- ❑ Vamos considerar uma forma elipsoide
- ❑ Podemos descrever um elipsoide com 3 coordenadas R_x , R_y e R_z .

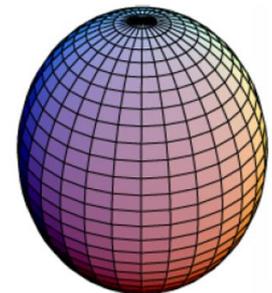


- ❑ A expressão matemática que descreve a superfície de um elipsoide é:

$$\left(\frac{x}{R_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{R_y}\right)^2 + \left(\frac{z}{R_z}\right)^2 = 1$$



Oblato



Prolato

- ❑ Para deformações axialmente simétricas, e cargas uniformemente distribuídas, o momento de quadrupolo elétrico é definido como:

$$Q = \frac{2}{5}Ze^2(R_z^2 - R_x^2) = \frac{2}{5}Ze^2(R_z^2 - R_y^2)$$

- ❑ Para $R_x=R_y < R_z$ a deformação é positivo (prolato) e $Q > 0$
- ❑ Para $R_x=R_y > R_z$ a deformação é negativa (oblata) e $Q < 0$

(a) spherical



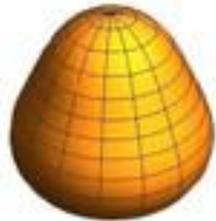
(b) prolate



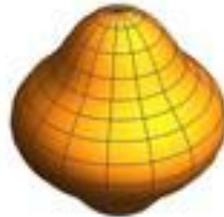
(c) oblate



(d) octupole



(e) hexadecapole



(f) tetrahedral

