L01 Física Matemática 02

Seja $f : M \to M$ uma função, onde M é um espaço métrico. Dizemos que $x \in M$ é um ponto fixo de M se $f(x) = x$.

Q1 Considere o caso onde $M = [a, b]$ é um intervalo fechado em $\mathbb{R}$ e f uma função contínua. Siga os passos abaixo para mostrar que f possui pelo menos um ponto fixo.

(a) Caso 1: $f(a) = a$ ou $f(b) = b$. Obviamente não há o que se demonstrar.

(b) Vamos examinar o Caso 2, $f(a) \neq a$ e $f(b) \neq b$. Defina a função $g(x) = x - f(x)$. Mostre que $g(a) < 0$ e $g(b) > 0$.

(c) Use o Teorema do Valor Intermediário (Cálculo 01) e conclua a demonstração

Q2. Seja $h : (-1, 1) \to (-1, 1)$ a função

$$h(x) = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$$

definida no intervalo aberto $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$. Mostre que h não possui ponto fixo.

Q3. Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que $f : M \to M$ é uma contração se existe uma constante c, $0 < c < 1$, tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq c\, d(x, y)$$

para todo par x, y em M. Nos itens a seguir, demonstraremos que se (M, d) é completo e f é uma contração contínua, então existe um único ponto $x \in M$ tal que $f(x) = x$. A prova deste teorema do ponto fixo consiste em construir uma sequência que converge para x.

Seja x_0 um ponto arbitrário de M. Definimos a sequência infinita $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, ...)$ recursivamente pelas equações

$$x_1 = f(x_0),$$
$$x_n = f(x_{n-1}).$$

O exercício consiste em mostrar que esta sequência tem as propriedades desejadas.

(a) Mostre que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n d(x_0, x_1).$$

(b) Seja $m = n + k$. Use a desigualdade triangular para mostrar que

$$d(x_n, x_m) \leq c^n(1 + c + c^2 + ... + c^{k-1})d(x_0, x_1).$$

(c) Mostre que

$$c^n(1 + c + c^2 + ... + c^{k-1}) \leq c^n \frac{1}{1-c}$$

e conclua que a sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.

(d) Como M é completo, então existe $x \in M$ tal que

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Mostre que $f(x) = x$. (Use a continuidade de f e a relação de recorrência $x_{n+1} = f(x_n)$.)

Q4. Seja $f : [\sqrt{\alpha}, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right)$$

com $\alpha > 0$.

(a) Mostre que a derivada $f'(x)$ satisfaz

$$0 < f'(x) < \frac{1}{2}$$

para $x \in (\sqrt{\alpha}, \infty)$. Mostre também que

$$f\left((\sqrt{\alpha}, \infty)\right) \subset (\sqrt{\alpha}, \infty)$$

e que $\sqrt{\alpha}$ é um ponto fixo de f.

(b) Mostre que $f : [\sqrt{\alpha}, \infty) \to [\sqrt{\alpha}, \infty)$ é uma contração. (Use o Teorema do Valor Médio).

(c) Mostre que $[\sqrt{\alpha}, \infty) \subset \mathbb{R}$ é um conjunto completo.

(d) Podemos concluir que valem as hipóteses do teorema do ponto fixo demonstrado em Q3. Use a série definida no item Q3 com $x_0 = 7$ para calcular as 5 primeiras aproximações de $\sqrt{3}$ e seus respectivos erros percentuais.

Q5. Seja $\mathbb{H}(2, \mathbb{C})$ o conjunto das matrizes 2×2, com entradas nos complexos, tais que se $A \in \mathbb{H}(2, \mathbb{C})$, $A = A^\dagger$, ou seja

$$(A^\dagger)_i^j = \overline{A_j^i}.$$

(a) Verifique que $\mathbb{H}(2, \mathbb{C})$ não é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ mas é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

(b) Considere o conjunto $B = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ onde

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Mostre que B é uma base de $\mathbb{H}(2, \mathbb{C})$.

(c) Encontre os autovalores α_1, α_2 de σ_1 e os respectivos projetores espectrais E_1, E_2.

(d) Verifique que, de fato, a decomposição espectral para σ_1 é válida.

(e) Calcule

$$R(\theta) = e^{i\theta\sigma_1},$$

para $\theta \in \mathbb{R}$.

Q6. Considere o espaço de Hilbert $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ de sequências em $\mathbb{C}$ com a base canônica $B = \{e_1, e_2, e_3, ...\}$, ou seja

$$e_1 = (1, 0, 0, ...),\; e_2 = (0, 1, 0, ...),\; e_3 = (0, 0, 1, 0, ...),\; etc,$$

e produto interno $\langle e_k, e_l \rangle = \delta_{kl}$. Considere também o espaço vetorial $S(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ das sequências de números complexos. Vamos construir uma função linear $A : l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to S(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Inicialmente definimos A nos elementos da base B de $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ por

$$A(e_n) = \sqrt{(n-1)}\; e_{n-1} \text{ para } n > 1,$$
$$A(e_1) = 0.$$

Por extensão linear, A estará definida para todo o $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. A função linear A pode ser pensada como uma matriz infinita e costuma ser chamada de operador linear. Usaremos então a notação Av para significar $A(v)$, $v \in l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$

(a) Mostre que a imagem de A não está contida em $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. (Dica: Tome uma sequência de quadrado somável da forma $a_n = 1/n^\alpha$, α real, e escolha α tal que que sua imágem não seja de quadrado somável.)

(b) Podemos definir o operador adjunto $A^\dagger$ de maneira similar, definido primeiramente sua ação na base B através da equação

$$\left\langle A^\dagger e_n, e_m \right\rangle = \langle e_n, A e_m \rangle .$$

Determine $A^\dagger e_n$.

(c) Calcule

$$(AA^\dagger - A^\dagger A) e_n.$$

(d) Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, encontre as sequências $v(\lambda) = (v_1, v_2, v_3, ...) \in S(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, tais que

$$Av(\lambda) = \lambda v(\lambda).$$

Para que valores de λ temos $v(\lambda) \in l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$? Normalize $v(\lambda)$ tal que $||v|| = 1$. Em outras palavras, $v(\lambda)$ são autovetores de A

(e) Mostre que $A^\dagger$ não possui nenhum autovetor complexo! Isto seria possível para matrizes finitas com entradas em $\mathbb{C}$?

Q7. Neste exercício vamos considerar um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ genérico. Em outras palavras, algumas das propriedades de $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, vistas em sala de aula, podem não ser válidas.

(a) Seja $F = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ um conjunto ortonormal finito em $\mathcal{H}$ e $a_1, a_2, ..., a_n$ números complexos. Mostre que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$$

(b) Considere um conjunto infinito $B = \{e_1, e_2, e_3, ...\}$ ortonormal contável em $\mathcal{H}$. (Note que B não precisa ser uma base de $\mathcal{H}$.). Dado uma sequência $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, ...)$ de números complexos, podemos definir um vetor

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Mostre que a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = (s_1, s_2, s_3, ...)$ converge em $\mathcal{H}$ se, e somente se,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

(Dica: defina as somas parciais $r_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$. Suponha que $(s_1, s_2, s_3, ...)$ converge e portanto é de Cauchy. Mostre a partir disto que a sequência $(r_1, r_2, r_3, ...)$ é de Cauchy.)