



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3554 – Introdução às Estruturas Aeronáuticas

Aula #09

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

14/09/2023



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda

Teoria de Placas

Parte 1: Flexão de placas retangulares longas em superfícies cilíndricas com (ou sem) esforços de membrana

1. Classificação geral das folhas
2. Hipóteses para os modelos preliminares
3. Equação governante para a flexão “cilíndrica” de placas [1]
4. Placa com lados simplesmente apoiados [2]
5. Placa com lados engastados [3]



1. Classificação geral das folhas

Def.: Recebem a denominação geral de *folhas* as estruturas nas quais duas dimensões predominam sobre uma terceira (relacionada à espessura).

Dependendo da geometria, das condições de carregamento e de outras características (como a rigidez a flexão), as folhas recebem denominações específicas como: chapas, placas, cascas e membranas.

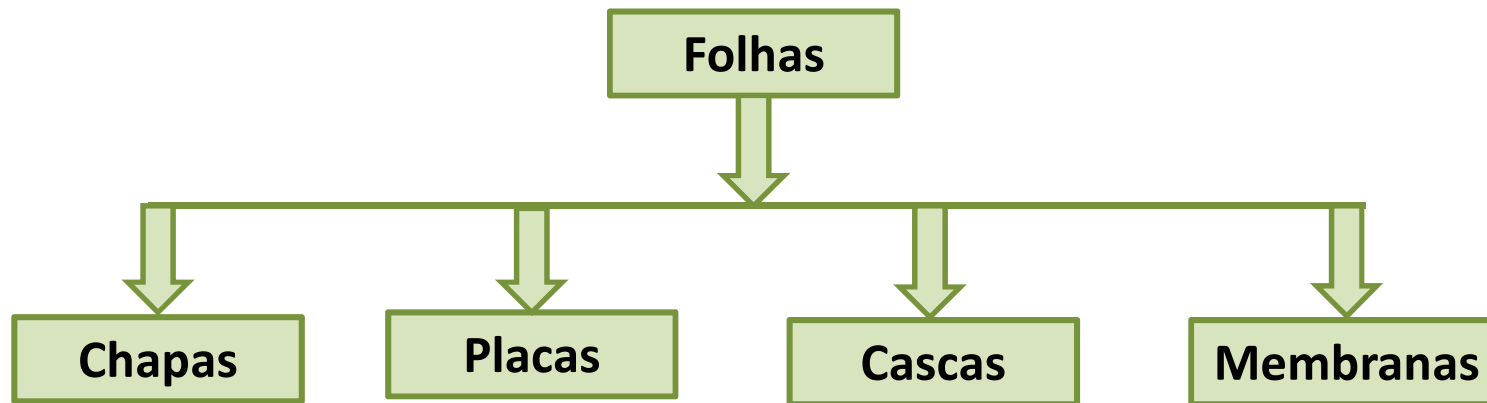


Fig.1. Classificação das folhas (estruturas de superfície)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

As chapas correspondem a estruturas de superfície nas quais todos os pontos pertencentes ao plano de meia espessura (plano médio) encontram-se em um único plano geométrico (ex: plano Oxy), tanto na configuração de referência quanto na configuração deformada. Além disso, o carregamento deve:

- i) ser aplicado apenas sobre os contornos cujas normais externas são paralelas ao plano Oxy ,
- ii) ser uniformemente distribuído ao longo da espessura e
- iii) possuir componentes segundo as direções x e y somente.

Em resumo, correspondem aos casos de estruturas em estado plano de tensões.

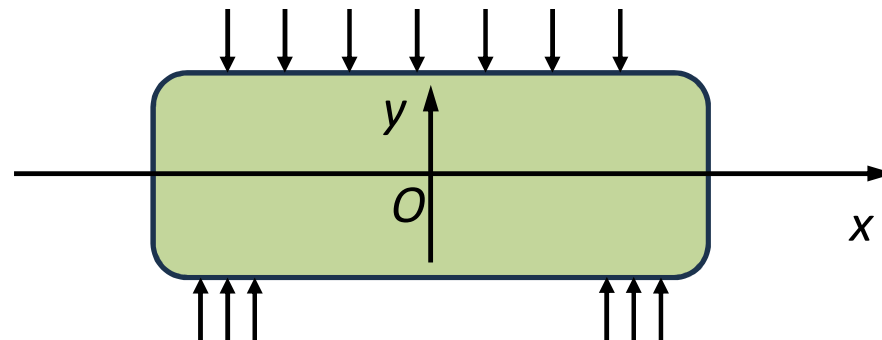


Fig.2. Chapa em estado plano de tensões.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

De forma análoga às chapas, as placas correspondem a estruturas de superfície nas quais todos os pontos pertencentes ao plano de meia espessura (plano médio) encontram-se em um único plano geométrico (Ex: plano Oxy), porém apenas na configuração de referência.

A diferença fundamental é que, além dos carregamentos previstos para o caso das chapas, pode haver também carregamentos ortogonais ao plano de meia espessura, atribuídos ao peso próprio das placas ou a esforços de outra natureza (ex.: ação do vento, carregamentos hidrostáticos ou hidrodinâmicos, pressões decorrentes do contato com outros corpos, etc.).

Desta forma, na configuração deformada, os pontos pertencentes ao plano de meia espessura, irão apresentar deslocamentos transversais ao plano médio, sendo tais deslocamentos uma das principais incógnitas do problema.

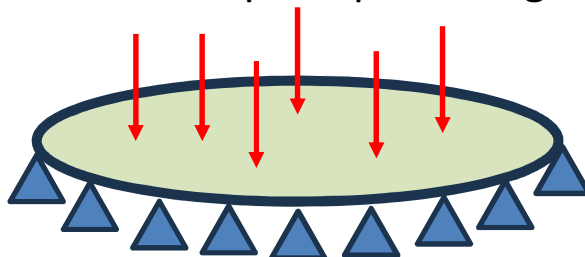


Fig.3. Placa circular sob ação de forças ortogonais ao plano médio.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

As cascas correspondem a estruturas de superfície tridimensionais, ou seja, aquelas nas quais a superfície de meia espessura é descrita por uma superfície tridimensional no espaço. Além disto, deve ter rigidez suficiente de modo a suportar esforços de flexão e torção distribuídos na estrutura, além dos esforços contidos no plano tangente à superfície média.

Como exemplos de cascas, citamos os reservatórios, os silos, a estrutura da fuselagem e das asas das aeronaves e os cascos das embarcações marítimas.



Fig.4. Exemplos de estruturas formadas por cascas.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Finalmente, o termo membrana é reservado a estruturas de superfície que não possuem rigidez suficiente para suportar esforços de flexão e de torção, e que, portanto, suportam os carregamentos externos modificando sua geometria de modo a oferecer apenas esforços normais (em geral, sempre de tração) contidos no plano tangente à superfície média.



Fig.5. Exemplos de estruturas formadas por membranas.



2. Hipóteses para os modelos preliminares

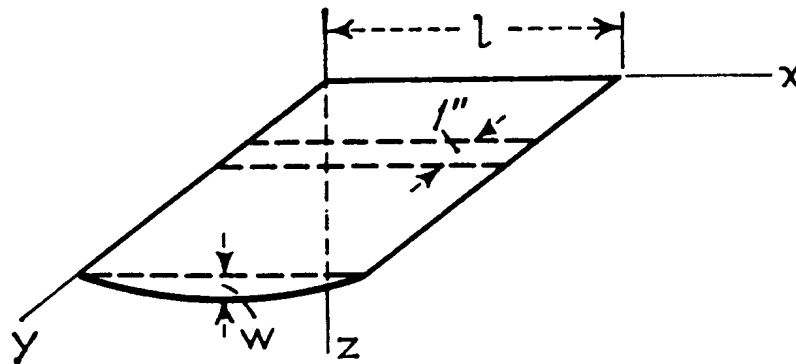
- Material homogêneo, isótropo e com comportamento elástico-linear;
- Linearidade geométrica;
- Placa retangular longa e de espessura uniforme;
- Carregamento pode variar ao longo do eixo Ox (lado curto da placa) mas não ao longo do eixo Oy (lado longo da placa);
- Espessura da placa é muito pequena em comparação com as demais dimensões da placa.



3. Equação governante para a flexão “cilíndrica” de placas [1]

Consideremos o problema (mais simples) de flexão de uma placa retangular longa submetida a um carregamento transversal que não varia ao longo de seu maior comprimento. A superfície defletida de uma porção desta placa, a uma certa distância das extremidades (que estão dispostas paralelamente ao lado de menor comprimento) pode ser considerada como uma superfície cilíndrica, onde o eixo do cilindro é paralelo ao lado de maior comprimento.

Assim, basta investigarmos o comportamento de uma fatia elementar retirada da placa por dois planos perpendiculares a seu maior comprimento e distantes de uma unidade de comprimento. Como veremos, a equação diferencial governante será análoga àquela obtida da teoria simples de viga.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

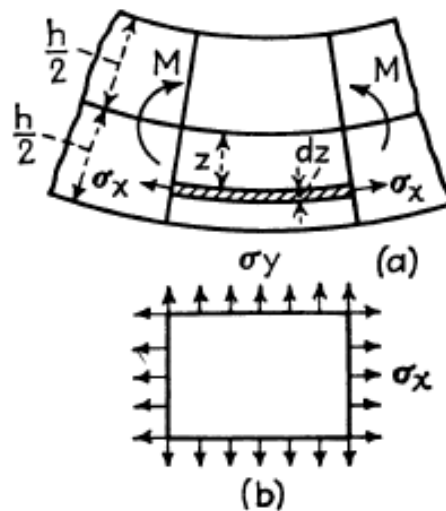
Seja h a espessura da placa (considerada constante) e tomemos xy como o plano de meia espessura da placa antes do carregamento. Consideremos que o eixo Oy seja o eixo paralelo aos eixos longitudinais (de maior comprimento) da placa, e Ox o eixo paralelo aos eixos de menor comprimento (largura) da placa (denominado l). Consideremos ainda que o eixo Oz seja orientado positivamente para baixo (seguindo a convenção clássica da teoria de placas).

Desta forma, podemos considerar que a placa irá se comportar como uma viga de comprimento l e seção transversal retangular (com altura h e base unitária). Para o cálculo das tensões normais devidas a flexão, podemos também admitir, como na teoria simples de viga, que as seções transversais que eram planas e ortogonais ao eixo central (antes da deformação) permanecerão planas e ortogonais ao eixo central (após a deformação).

Também, como na teoria simples de viga, consideraremos que $\sigma_z \ll (\sigma_x, \sigma_y)$, de modo a desprezar as tensões normais σ_z face às demais tensões existentes na placa.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Da lei de Hooke:

$$\left[\begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} \\ \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_x}{E} = 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{(1 - \nu^2) \sigma_x}{E} \\ \sigma_x = \frac{E \epsilon_x}{1 - \nu^2} = - \frac{E z}{1 - \nu^2} \frac{d^2 w}{dx^2} \end{array} \right]$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Deve-se ressaltar que, se a placa estiver submetida à ação concomitante de esforços (de tração ou compressão) agindo na direção x (e distribuídos uniformemente ao longo da direção y), as parcelas de tensões normais (σ_x) correspondentes a tais esforços devem ser adicionados às tensões indicadas no slide #11, decorrentes da flexão.

De posse das tensões de flexão σ_x , determina-se o momento fletor correspondente (denominado M_x) por integração ao longo da espessura da placa:

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \, dz = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Ez^2}{1 - \nu^2} \frac{d^2w}{dx^2} \, dz = - \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \frac{d^2w}{dx^2}$$

Ou, definindo a rigidez à flexão de placas (D) como: $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$:

Obtemos a equação governante: $D \frac{d^2w}{dx^2} = -M$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Que é análoga à equação da linha elástica deduzida na teoria simples de viga:

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -M(x)$$

...desde que guardadas as mesmas notações e convenções de sinais.

Se houver apenas carregamentos transversais agindo sobre a placa e as extremidades (em $x = 0$ e em $x = l$) estiverem livres para se aproximar uma da outra conforme as deflexões ocorrem (ou seja, sem esforços horizontais que impeçam esta aproximação), a expressão para o momento fletor $M = M(x)$ pode ser facilmente obtida e, por integração da EDO, obtemos também o campo de deslocamentos transversais.



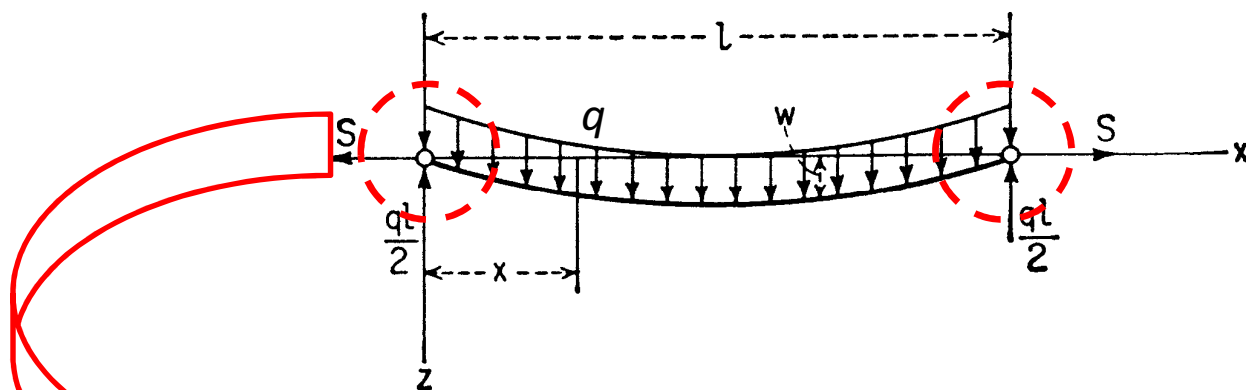
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Em alguns casos, porém, a placa pode ter suas extremidades (em $x = 0$ e em $x = l$) impedidas de se aproximar uma da outra, o que gera forças distribuídas ao longo dos lados paralelos ao eixo y conforme as deflexões ocorrem. Tais reações dependem, naturalmente, da magnitude das deflexões e afetam também o momento fletor resultante, necessário para resolver a EDO.

Nos itens seguintes, apresentaremos a solução deste problema para o caso particular em que uma pressão uniforme age sobre a placa.



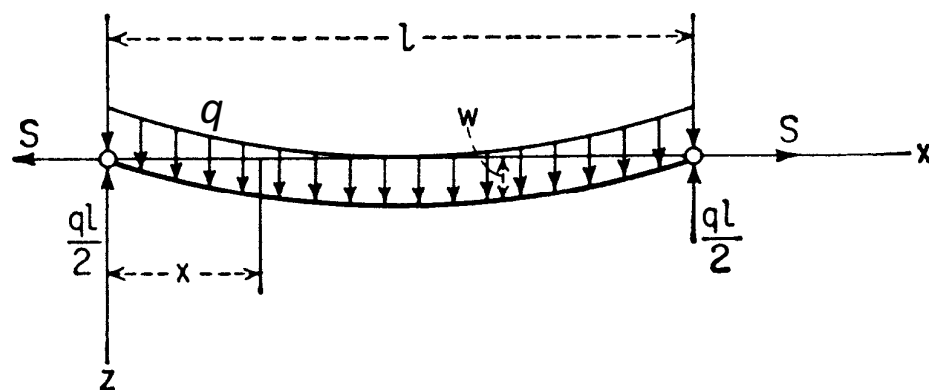
4. Placa com lados simplesmente apoiados [2]



Note que as duas extremidades (em $x = 0$ e em $x = l$) estão simplesmente apoiadas, mas impedidas de se aproximarem, o que faz surgir as forças horizontais (por unidade de comprimento) denotadas por S . A pressão aplicada sobre a placa é denominada q (considerada uniformemente distribuída).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



O momento fletor a uma distância x da extremidade esquerda é dado por:

$$M = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} - Sw$$

E a EDO é dada por (vide slide #12):

$$D \frac{d^2w}{dx^2} = -M(x) = Sw + \frac{qx^2}{2} - \frac{qlx}{2}$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{S}{D}w = \frac{qx^2}{2D} - \frac{qlx}{2D}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Teremos: $w(x) = w_h(x) + w_p(x)$

Solução da EDO homogênea:

Buscando soluções da forma $w(x) = Ae^{\eta x}$, teremos:

$$Ae^{\eta x} \left[\eta^2 - \frac{S}{D} \right] = 0 \Leftrightarrow \eta = \pm \sqrt{S/D}$$

Chamando: $u^2 = \frac{l^2 S}{4 D}$, teremos (para $S > 0$): $\eta = \pm \frac{2u}{l}$

Resultando: $w_h(x) = A_1 \exp\left(\frac{2ux}{l}\right) + A_2 \exp\left(-\frac{2ux}{l}\right)$

Ou ainda: $w_h(x) = C_1 \sinh\left(\frac{2ux}{l}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{2ux}{l}\right)$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução particular da EDO:

Buscando uma solução particular na forma de um polinômio de grau 2, ou seja, na forma: $w_p(x) = B_0x^2 + B_1x + B_2$, virá, após substituição na EDO:

$$\frac{d^2w_p}{dx^2} - \frac{S}{D}w_p = \frac{qx^2}{2D} - \frac{qlx}{2D}$$

$$2B_0 - \frac{S}{D}(B_0x^2 + B_1x + B_2) = \frac{qx^2}{2D} - \frac{qlx}{2D}$$

Resultando:

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{S}{D}B_0 = \frac{q}{2D} \\ -\frac{S}{D}B_1 = -\frac{ql}{2D} \\ 2B_0 - \frac{S}{D}B_2 = 0 \end{array} \right] \longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} B_0 = -\frac{q}{2S} \\ B_1 = \frac{ql}{2S} \\ B_2 = -\frac{Dq}{S^2} \end{array} \right]$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Logo: $w_p(x) = -\frac{q}{2S}x^2 + \frac{ql}{2S}x - \frac{Dq}{S^2}$

E, lembrando que: $u^2 = l^2 S / 4D \Leftrightarrow S = 4u^2 D / l^2$, teremos:

$$w_p(x) = -\frac{ql^2 x^2}{8u^2 D} + \frac{ql^3 x}{8u^2 D} - \frac{ql^4}{16u^4 D}$$

Solução da EDO:

$$w(x) = w_h(x) + w_p(x)$$

$$w(x) = C_1 \sinh\left(\frac{2ux}{l}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{2ux}{l}\right) - \frac{ql^2 x^2}{8u^2 D} + \frac{ql^3 x}{8u^2 D} - \frac{ql^4}{16u^4 D}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

As constantes C_1 e C_2 são obtidas a partir das condições de contorno da placa que, no caso, são:

$$w(0) = 0 \quad e \quad w(l) = 0$$

Levando ao sistema:

$$\left[\begin{array}{l} w(0) = C_2 - \frac{ql^4}{16u^4D} = 0 \\ w(l) = C_1 \sinh(2u) + C_2 \cosh(2u) - \frac{ql^4}{16u^4D} = 0 \end{array} \right.$$

Cuja solução é:

$$C_1 = \frac{ql^4}{16u^4D} \left(\frac{1 - \cosh(2u)}{\sinh(2u)} \right) \quad C_2 = \frac{ql^4}{16u^4D}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Assim:

$$w(x) = \frac{ql^4}{16u^4D} \left[\left(\frac{1 - \cosh(2u)}{\sinh(2u)} \right) \sinh\left(\frac{2ux}{l}\right) + \cosh\left(\frac{2ux}{l}\right) - 1 \right] + \frac{ql^2x}{8u^2D} (l - x)$$

Ou ainda, utilizando as relações:

$$\begin{aligned} \cosh 2u &= \cosh^2 u + \sinh^2 u & \sinh 2u &= 2 \sinh u \cosh u \\ \cosh^2 u &= 1 + \sinh^2 u \end{aligned}$$

Podemos mostrar que:
$$\frac{1 - \cosh(2u)}{\sinh(2u)} = -\frac{\sinh(u)}{\cosh(u)} = -\tanh(u)$$

Assim:

$$w(x) = \frac{ql^4}{16u^4D} \left[-\tanh(u) \sinh\left(\frac{2ux}{l}\right) + \cosh\left(\frac{2ux}{l}\right) - 1 \right] + \frac{ql^2x}{8u^2D} (l - x)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Resta, contudo, determinar ainda o valor da força distribuída S . Tal força pode ser encontrada a partir da condição de que as extremidades da placa encontram-se fixas (sem movimento relativo), de modo que, por um lado:

$$\varepsilon_{x,0} = \frac{(1 - \nu^2)}{E} \sigma_{x,0} = \frac{(1 - \nu^2)}{E} \frac{S}{h}$$

E, por outro:

$$\varepsilon_{x,0} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{l} \left(\frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right)$$

Logo:

$$\frac{(1 - \nu^2)}{E} \frac{Sl}{h} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Retomando a solução encontrada para $w(x)$, e calculando a integral indicada no slide anterior, resulta por fim a seguinte equação transcendental para o cálculo de u (e consequentemente de S):

$$\left[\frac{1}{(1 - \nu^2)} \frac{E}{q} \left(\frac{h}{l} \right)^4 \right]^2 = \frac{135}{16u^8} \left(\frac{\tanh(u)}{u} - 1 \right) + \frac{27}{16} \left(\frac{\tanh(u)}{u^4} \right)^2 + \frac{9}{8u^6}$$

Assim, uma vez dados os parâmetros E , ν , q , h e l podemos resolver numericamente a equação acima para obter o valor de u e, a partir dele:

$$S = \frac{4u^2 D}{l^2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para o cálculo do momento fletor, basta retomar as expressões vistas nos slides #16 e #21:

$$M(x) = -D \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$w(x) = \frac{ql^4}{16u^4 D} \left[\left(\frac{1 - \cosh(2u)}{\sinh(2u)} \right) \sinh\left(\frac{2ux}{l}\right) + \cosh\left(\frac{2ux}{l}\right) - 1 \right] + \frac{ql^2 x}{8u^2 D} (l - x)$$

Resultando, neste caso:

$$M(x) = \frac{qL^2}{4u^2} \left[\tanh(u) \sinh\left(\frac{2ux}{L}\right) - \cosh\left(\frac{2ux}{L}\right) + 1 \right]$$

$$M_{\text{máx}} = M(l/2) = \frac{qL^2}{4u^2} [1 - \text{sech}(u)]$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Tomando, como exemplo, o caso em que $h = 0,5"$, $l = 50"$, $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$, $\nu = 0,3$ e $q = 20 \text{ psi}$, teremos:

$$\left[\frac{1}{(1 - \nu^2)} \frac{E}{q} \left(\frac{h}{l} \right)^4 \right]^2 \cong 2,71706 \times 10^{-4}$$

E a única solução real e positiva para u é: $u \cong 3,7938287$

Levando a: $S \cong 7908 \text{ lbf/in}$

Assim, a tensão normal devida ao esforço horizontal S será:

$$\sigma_1 = \frac{S}{h} = \frac{4u^2 D}{hl^2} = \frac{Eu^2}{3(1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \cong 15816 \text{ psi} \cong 109 \text{ MPa}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

E a máxima tensão normal de tração devida a flexão será dada por (vide slide #11):

$$\sigma_2 = \sigma_{b,m\acute{a}x} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \frac{h}{2} \left(\left| \frac{d^2 w}{dx^2} \right| \right) \Big|_{m\acute{a}x} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \frac{h}{2} \frac{|M|_{m\acute{a}x}}{D} = \frac{6|M|_{m\acute{a}x}}{h^2}$$

E como: $M_{m\acute{a}x} = M(l/2) = \frac{qL^2}{4u^2} [1 - \operatorname{sech}(u)] \cong 829,39 \text{ lbf}$

Teremos: $\sigma_2 = \sigma_{b,m\acute{a}x} = \frac{6|M|_{m\acute{a}x}}{h^2} \cong 19905 \text{ psi} \cong 137 \text{ MPa}$

Somando as duas tensões:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma_1 + \sigma_2 = 35721 \text{ psi} \cong 246 \text{ MPa}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Já o máximo deslocamento transversal será, neste caso:

$$w_{m\acute{a}x} = w(l/2) = \frac{ql^4}{16u^4D} [\operatorname{sech}(u) - 1] + \frac{ql^4}{32u^2D}$$

$$w_{m\acute{a}x} = \frac{ql^4}{16D} \left[\frac{\operatorname{sech}(u) - 1}{u^4} + \frac{1}{2u^2} \right]$$

$$w_{m\acute{a}x} \cong 0,685 \text{ in} \cong 17,4 \text{ mm}$$

Obs: $\frac{w_{m\acute{a}x}}{l} \cong 0,0137$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

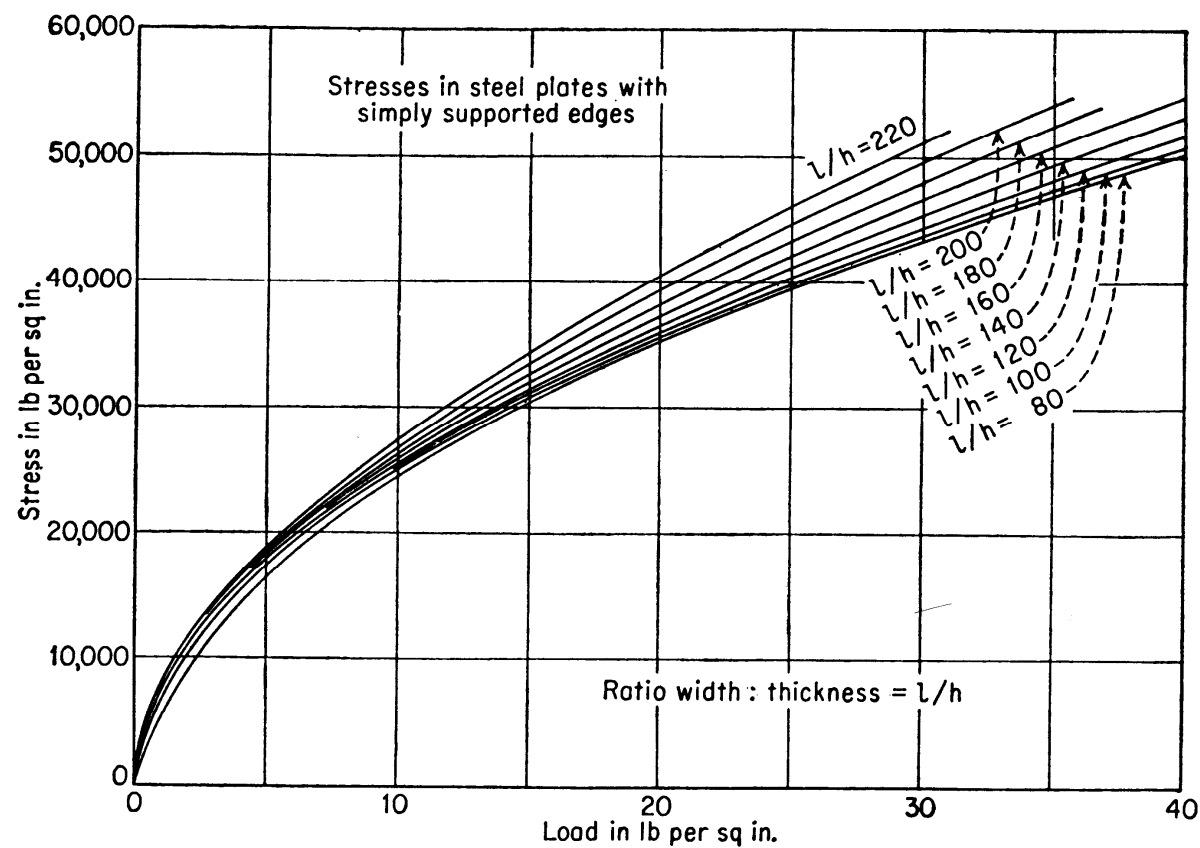


Fig.6. Máxima tensão normal combinada (tração + flexão) em placas longas simplesmente apoiadas nas extremidades em função da pressão aplicada.

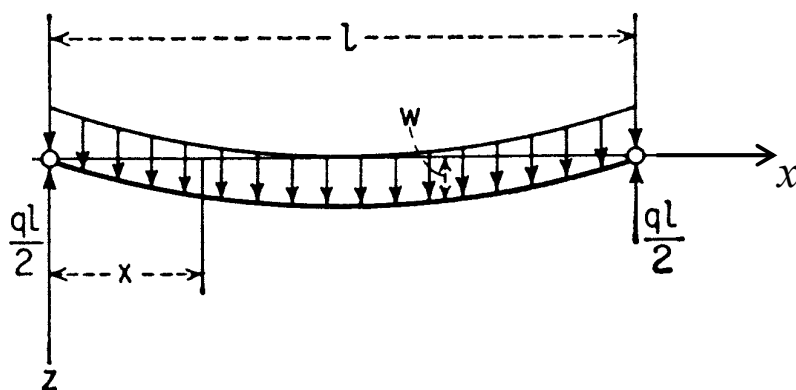


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

O caso particular em que as extremidades da placa (em $x = 0$ e em $x = l$) encontram-se simplesmente apoiadas, mas livres para se aproximarem uma da outra pode ser facilmente analisado por uma das duas formas:

1. Reescrevendo a expressão do momento fletor (agora sem a parcela devida à força normal) e encontrando a solução da nova EDO;
2. Utilizando as expressões anteriores e levando ao limite para $u \rightarrow 0$.

Optando por (1), teremos:



$$M(x) = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

$$D \frac{d^2w}{dx^2} = -M(x) = \frac{qx^2}{2} - \frac{qlx}{2}$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{q}{2D} (x^2 - lx)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{q}{2D}(x^2 - lx) \quad \Rightarrow \quad \frac{dw}{dx} = \frac{q}{2D}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{lx^2}{2} + C_1\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad w(x) = \frac{q}{2D}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{lx^3}{6} + C_1x + C_2\right)$$

Novamente, as constantes C_1 e C_2 são obtidas a partir das condições de contorno da placa que são:

$$w(0) = 0 \quad e \quad w(l) = 0$$

Levando ao sistema:

$$\left[\begin{array}{l} w(0) = \frac{qC_2}{2D} = 0 \Leftrightarrow C_2 = 0 \\ w(l) = \frac{q}{2D}\left(-\frac{l^4}{12} + C_1l\right) = 0 \Leftrightarrow C_1 = \frac{l^3}{12} \end{array} \right.$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Resultando: $w(x) = \frac{q}{24D} (x^4 - 2lx^3 + l^3x)$

As tensões normais serão, agora, devidas apenas à flexão da placa e dadas por:

$$\sigma_x = \frac{E\epsilon_x}{1 - \nu^2} = - \frac{Ez}{1 - \nu^2} \frac{d^2w}{dx^2} = - \frac{Ez}{(1 - \nu^2)} \frac{q}{2D} (x^2 - lx)$$

$$\sigma_x = - \frac{6qz}{h^3} (x^2 - lx)$$

A máxima tensão normal de tração ocorrerá para $x = l/2$ e $z = h/2$ e vale:

$$\sigma_{x,m\acute{a}x} = \frac{3q}{4} \left(\frac{l}{h} \right)^2$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Tomando, a título de comparação os mesmos parâmetros utilizados no caso anterior (ou seja, $h = 0,5"$, $l = 50"$, $E = 30 \times 10^6 psi$, $\nu = 0,3$ e $q = 20 psi$), teremos:

$$w_{m\acute{a}x} = w(l/2) = \frac{5ql^4}{384D} = \frac{5}{32} \frac{(1 - \nu^2)ql^4}{Eh^3} \cong 4,74" \cong 120,4 mm$$

(máximo deslocamento é cerca de 7 vezes maior do que o anterior)

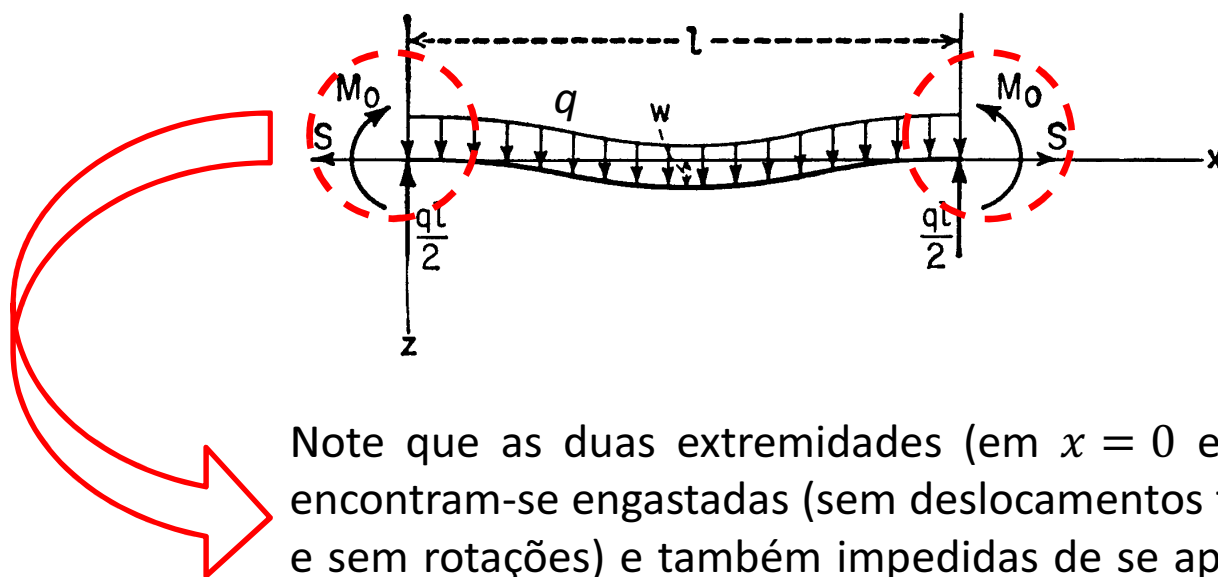
Obs: $\frac{w_{m\acute{a}x}}{l} \cong 0,0948$

$$\sigma_{x,m\acute{a}x} = \frac{3q}{4} \left(\frac{l}{h} \right)^2 \cong 150.000 psi = 150 ksi \cong 1034 MPa$$

(máxima tensão é cerca de 4,2 vezes maior do que a anterior)



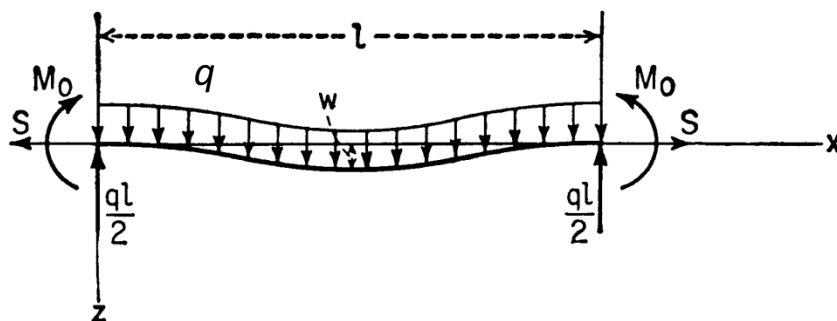
5. Placa com lados engastados [3]



Note que as duas extremidades (em $x = 0$ e em $x = l$) encontram-se engastadas (sem deslocamentos transversais e sem rotações) e também impedidas de se aproximarem, o que faz surgir as forças horizontais (por unidade de comprimento) denotadas por S . A pressão aplicada sobre a placa é denominada q (considerada uniformemente distribuída).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



O momento fletor a uma distância x da extremidade esquerda é dado por:

$$M = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} - Sw + M_0$$

E a EDO é dada por (vide slide #12):

$$D \frac{d^2w}{dx^2} = -M(x) = Sw + \frac{qx^2}{2} - \frac{qlx}{2} - M_0$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{S}{D}w = \frac{qx^2}{2D} - \frac{qlx}{2D} - \frac{M_0}{D}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Teremos: $w(x) = w_h(x) + w_p(x)$

A solução da EDO homogênea é, como visto anteriormente:

$$w_h(x) = C_1 \sinh\left(\frac{2ux}{l}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{2ux}{l}\right) \quad \text{Onde: } u^2 = \frac{l^2 S}{4D}$$

Solução particular da EDO:

Buscando novamente uma solução particular na forma de um polinômio de grau 2 (ou seja, na forma: $w_p(x) = B_0 x^2 + B_1 x + B_2$), virá após substituição na EDO:

$$\frac{d^2 w_p}{dx^2} - \frac{S}{D} w_p = \frac{q x^2}{2D} - \frac{q l x}{2D} - \frac{M_0}{D}$$

$$2B_0 - \frac{S}{D} (B_0 x^2 + B_1 x + B_2) = \frac{q x^2}{2D} - \frac{q l x}{2D} - \frac{M_0}{D}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Resultando:

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{S}{D} B_0 = \frac{q}{2D} \\ -\frac{S}{D} B_1 = -\frac{ql}{2D} \\ 2B_0 - \frac{S}{D} B_2 = -\frac{M_0}{D} \end{array} \right] \longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} B_0 = -\frac{q}{2S} \\ B_1 = \frac{ql}{2S} \\ B_2 = -\frac{Dq}{S^2} + \frac{M_0}{S} \end{array} \right]$$

Logo: $w_p(x) = -\frac{q}{2S}x^2 + \frac{ql}{2S}x - \frac{Dq}{S^2} + \frac{M_0}{S}$

E, lembrando que: $u^2 = l^2 S / 4D \Leftrightarrow S = 4u^2 D / l^2$, teremos:



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$w_p(x) = -\frac{ql^2x^2}{8u^2D} + \frac{ql^3x}{8u^2D} - \frac{ql^4}{16u^4D} + \frac{M_0l^2}{4u^2D}$$

Solução da EDO: $w(x) = w_h(x) + w_p(x)$

$$w(x) = C_1 \sinh\left(\frac{2ux}{l}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{2ux}{l}\right) - \frac{ql^2x^2}{8u^2D} + \frac{ql^3x}{8u^2D} - \frac{ql^4}{16u^4D} + \frac{M_0l^2}{4u^2D}$$

As constantes C_1 e C_2 , bem como o momento M_0 , podem ser obtidos a partir das seguintes condições:

$$w(0) = 0 \quad , \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad , \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=l/2} = 0$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Levando ao sistema:

$$\left[\begin{array}{l} w(0) = C_2 - \frac{ql^4}{16u^4D} + \frac{M_0l^2}{4u^2D} = 0 \\ \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{2uC_1}{l} + \frac{ql^3}{8u^2D} = 0 \\ \frac{dw}{dx} \Big|_{x=l/2} = \frac{2uC_1}{l} \cosh(u) + \frac{2uC_2}{l} \sinh(u) = 0 \end{array} \right.$$

Cuja solução é:

$$\left[\begin{array}{l} C_1 = -\frac{ql^4}{16u^3D} \quad C_2 = \frac{ql^4}{16u^3D} \coth u \\ M_0 = \frac{ql^2}{4u^2} - \frac{ql^2}{4u} \coth u = -\frac{ql^2}{12} \psi_1(u) \\ \psi_1(u) = \frac{3(u - \tanh u)}{u^2 \tanh u} \end{array} \right.$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Levando ao campo de deslocamentos:

$$w(x) = \frac{ql^4}{16u^3 \tanh(u)D} \left[\frac{\cosh\left(u\left(1 - \frac{2x}{l}\right)\right)}{\cosh(u)} - 1 \right] + \frac{ql^2 x(l-x)}{8u^2 D}$$

Para o cálculo de u , utilizamos o mesmo procedimento empregado anteriormente, ou seja:

$$\varepsilon_{x,0} = \frac{(1 - \nu^2)}{E} \sigma_{x,0} = \frac{(1 - \nu^2)}{E} \frac{S}{h}$$

$$\varepsilon_{x,0} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{l} \left(\frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Logo:

$$\frac{(1 - \nu^2) Sl}{E h} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx$$

Retomando a solução encontrada para $w(x)$, e calculando a integral indicada acima, resulta por fim a seguinte equação transcendental para o cálculo de u (e conseqüentemente de S):

$$\left[\frac{1}{(1 - \nu^2)} \frac{E}{q} \left(\frac{h}{l} \right)^4 \right]^2 = - \frac{81}{16u^7 \tanh(u)} - \frac{27}{16u^6 \sinh^2 u} + \frac{27}{4u^8} + \frac{9}{8u^6}$$

Assim, uma vez dados os parâmetros E , ν , q , h e l , podemos resolver numericamente a equação acima para obter o valor de u e, a partir dele:

$$S = \frac{4u^2 D}{l^2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Cálculo do momento fletor:

$$M(x) = -D \frac{d^2 w}{dx^2}$$
$$w(x) = \frac{ql^4}{16u^3 \tanh(u)D} \left[\frac{\cosh\left(u\left(1 - \frac{2x}{l}\right)\right)}{\cosh(u)} - 1 \right] + \frac{ql^2 x(l-x)}{8u^2 D}$$

Resultando, neste caso:

$$M(x) = \frac{qL^2}{4u^2} \left[1 - \frac{u \cdot \cosh\left[u\left(1 - \frac{2x}{L}\right)\right]}{\sinh(u)} \right]$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Tomando, como exemplo, o caso em que $h = 0,5"$, $l = 50"$, $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$, $\nu = 0,3$ e $q = 20 \text{ psi}$, teremos:

$$\left[\frac{1}{(1 - \nu^2)} \frac{E}{q} \left(\frac{h}{l} \right)^4 \right]^2 \cong 2,71706 \times 10^{-4}$$

E a única solução real e positiva para u é: $u \cong 2,847093$

Levando a: $S \cong 4454 \text{ lbf/in}$

Assim, a tensão normal devida ao esforço horizontal S será:

$$\sigma_1 = \frac{S}{h} = \frac{4u^2 D}{hl^2} = \frac{Eu^2}{3(1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \cong 8908 \text{ psi} \cong 61,4 \text{ MPa}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

E a máxima tensão normal de tração devida a flexão será dada por (vide slide #11):

$$\sigma_2 = \sigma_{b,m\acute{a}x} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \frac{h}{2} \left(\left| \frac{d^2 w}{dx^2} \right| \right) \Big|_{m\acute{a}x} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \frac{h}{2} \frac{|M|_{m\acute{a}x}}{D} = \frac{6|M|_{m\acute{a}x}}{h^2}$$

E como: $|M_{m\acute{a}x}| \cong 2878 \text{ lbf}$ (vide gráfico no slide seguinte)

Teremos: $\sigma_2 = \sigma_{b,m\acute{a}x} = \frac{6|M|_{m\acute{a}x}}{h^2} \cong 69072 \text{ psi} \cong 476,2 \text{ MPa}$

Somando as duas tensões:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma_1 + \sigma_2 = 77980 \text{ psi} \cong 537,6 \text{ MPa}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

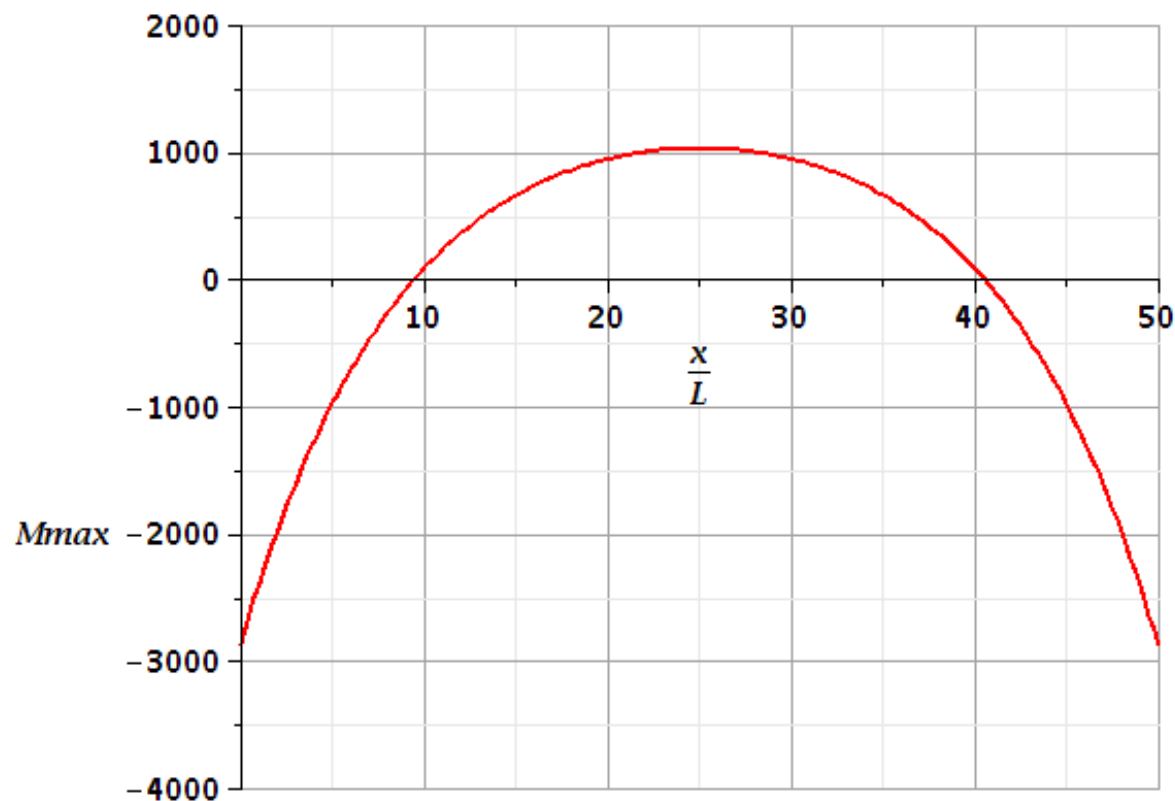


Fig.7. Distribuição do momento fletor (em $lb\cdot f\cdot in$) ao longo do eixo x em placas longas, biengastadas nas extremidades, e submetidas a pressão uniforme (lados impedidos de se aproximarem). Dados: $h = 0,5"$, $l = 50"$, $E = 30 \times 10^6 psi$, $\nu = 0,3$ e $q = 20 psi$.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Já o máximo deslocamento transversal será, neste caso:

$$w_{m\acute{a}x} = w(l/2) = \frac{ql^4}{16u^3 \tanh(u)D} [\operatorname{sech}(u) - 1] + \frac{ql^4}{32u^2 D}$$

$$w_{m\acute{a}x} \cong 0,5256 \text{ in} \cong 13,3 \text{ mm} \quad (\text{vide gráfico no slide seguinte})$$

Obs: $\frac{w_{m\acute{a}x}}{l} \cong 0,0105$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

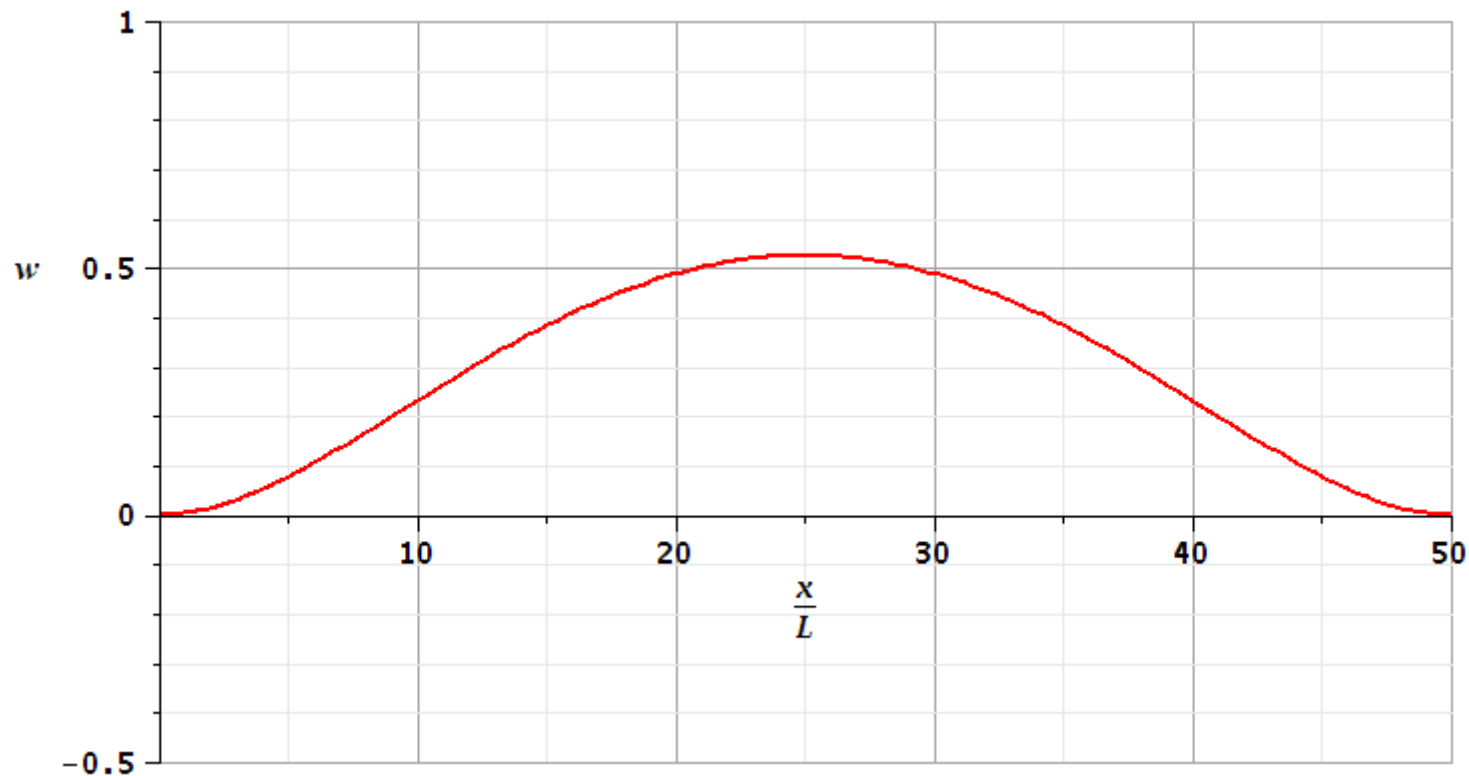


Fig.8. Deslocamentos transversais (em *in*) dos pontos do plano de meia-espessura da placa ao longo do eixo x (para placas longas, biengastadas nas extremidades e submetidas a pressão uniforme (lados impedidos de se aproximarem)).
Dados: $h = 0,5"$, $l = 50"$, $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$, $\nu = 0,3$ e $q = 20 \text{ psi}$.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

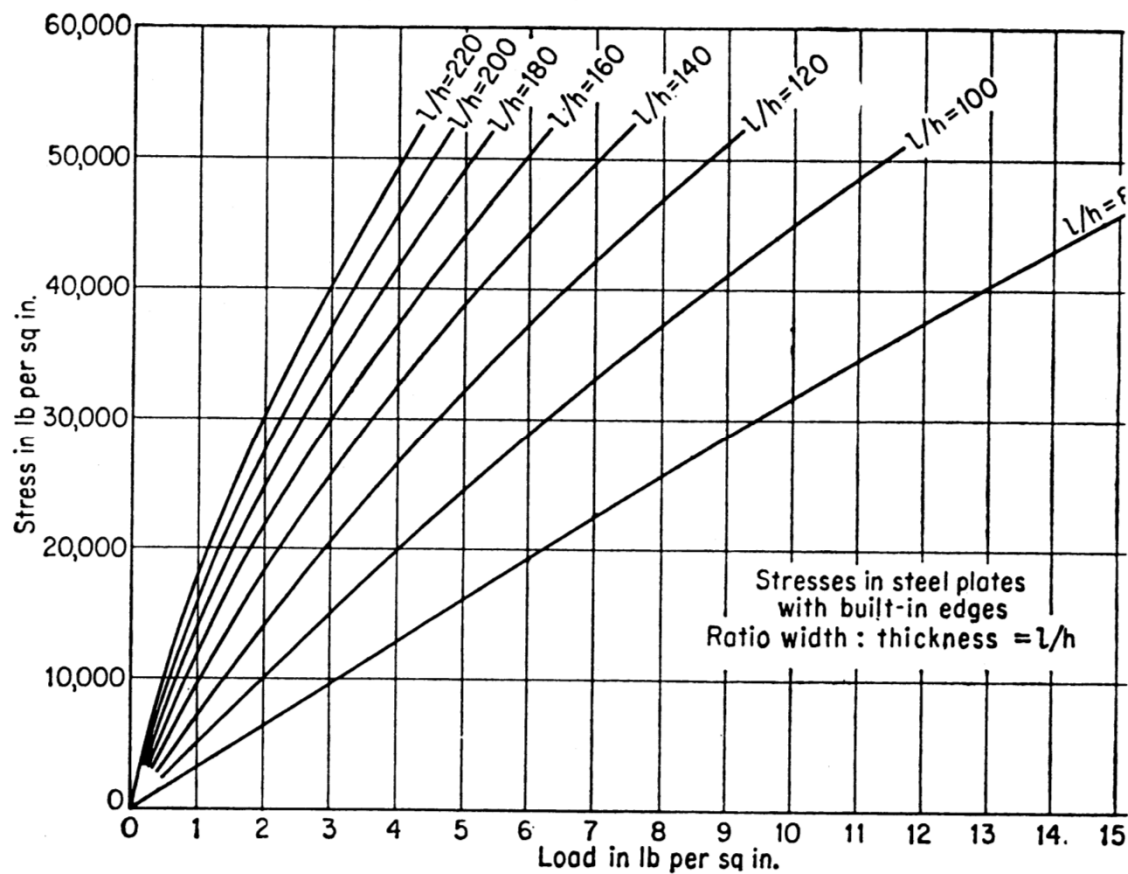


Fig.9. Máxima tensão normal combinada (tração + flexão) em placas longas, e engastadas nas extremidades, em função da pressão aplicada.

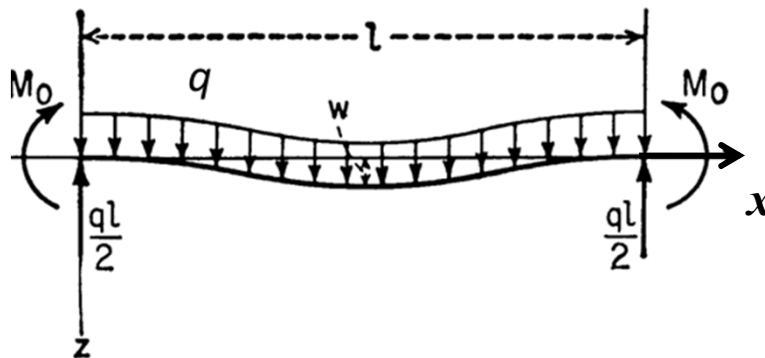


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

O caso particular em que as extremidades da placa (em $x = 0$ e em $x = l$) encontram-se engastadas, mas livres para se aproximarem uma da outra pode ser facilmente analisado por uma das duas formas:

1. Reescrevendo a expressão do momento fletor (agora sem a parcela devida à força normal) e encontrando a solução da nova EDO;
2. Utilizando as expressões anteriores e levando ao limite para $u \rightarrow 0$.

Optando por (1), teremos:



$$M(x) = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} + M_0$$

$$D \frac{d^2 w}{dx^2} = -M(x) = \frac{qx^2}{2} - \frac{qlx}{2} - M_0$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{q}{2D} (x^2 - lx) - \frac{M_0}{D}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Resultando: $w(x) = \frac{q}{24D} (x^4 - 2lx^3 + l^2x^2)$

As tensões normais serão apenas devidas à flexão da placa e dadas por:

$$\sigma_x = \frac{E\epsilon_x}{1 - \nu^2} = - \frac{Ez}{1 - \nu^2} \frac{d^2w}{dx^2} = - \frac{Ez}{(1 - \nu^2)} \frac{q}{2D} \left(x^2 - lx + \frac{l^2}{6} \right)$$
$$\sigma_x = - \frac{6qz}{h^3} \left(x^2 - lx + \frac{l^2}{6} \right)$$

A máxima tensão normal de tração ocorrerá para $x = 0$ e para $z = -h/2$ e vale:

$$\sigma_{x,m\acute{a}x} = \frac{q}{2} \left(\frac{l}{h} \right)^2$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Tomando, a título de comparação os mesmos parâmetros utilizados no caso anterior (ou seja, $h = 0,5"$, $l = 50"$, $E = 30 \times 10^6 psi$, $\nu = 0,3$ e $q = 20 psi$), teremos:

$$w_{m\acute{a}x} = w(l/2) = \frac{ql^4}{384D} = \frac{1}{32} \frac{(1 - \nu^2)ql^4}{Eh^3} \cong 0,95" \cong 24 \text{ mm}$$

(máximo deslocamento é cerca de 1,8 vezes maior do que o anterior)

Obs: $\frac{w_{m\acute{a}x}}{l} \cong 0,019$

$$\sigma_{x,m\acute{a}x} = \frac{q}{2} \left(\frac{l}{h} \right)^2 = 100000 \text{ psi} = 100 \text{ ksi} \cong 690 \text{ MPa}$$

(máxima tensão é apenas 28% maior do que a anterior)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

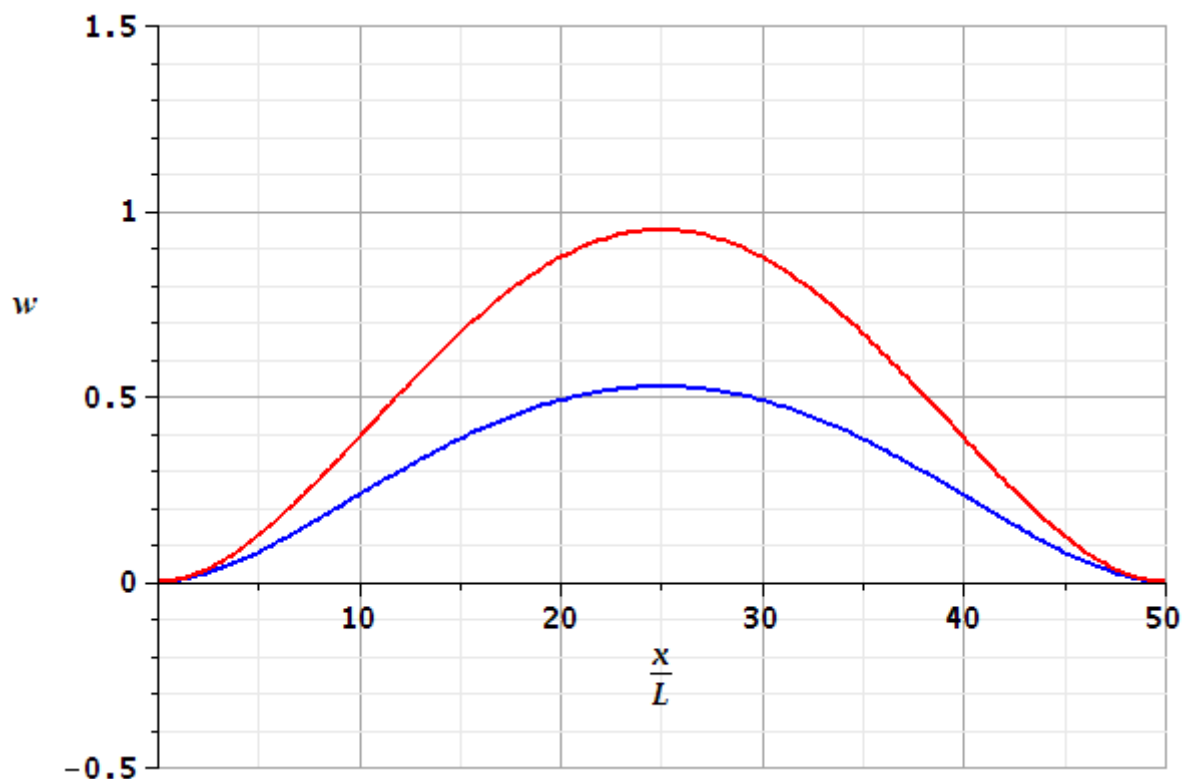


Fig.10. Comparação entre os deslocamentos transversais (em *in*) dos pontos do plano de meia-espessura da placa: — (força horizontal nula), — (força horizontal não nula).
Dados: $h = 0,5''$, $l = 50''$, $E = 30 \times 10^6 psi$, $\nu = 0,3$ e $q = 20 psi$.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Timoshenko, S.P., Woinowsky-Krieger, W. Theory of Plates and Shells, 2nd ed. McGraw-Hill Book Company, 1987. Part 1: Differential equation for cylindrical bending of plates, pg.4-6.
- [2] Timoshenko, S.P., Woinowsky-Krieger, W. Theory of Plates and Shells, 2nd ed. McGraw-Hill Book Company, 1987. Part 2: Cylindrical bending of uniformly loaded rectangular plates with simply supported edges, 6-12.
- [3] Timoshenko, S.P., Woinowsky-Krieger, W. Theory of Plates and Shells, 2nd ed. McGraw-Hill Book Company, 1987. Part 3: Cylindrical bending of uniformly loaded rectangular plates with built-in edges, 13-17.
- [4] Timoshenko, S.P., Woinowsky-Krieger, W. Theory of Plates and Shells, 2nd ed. McGraw-Hill Book Company, 1987. Part 4: Cylindrical bending of uniformly loaded rectangular plates with elastically built-in edges, 17-20.