

Termo-Estatística

Prof. Thales Souza Freire

14 de setembro de 2023

- Q 1.** Imagine que seja possível construir um cilindro tão fino que a movimentação das partículas de um gás contido neste recipiente possa ser considerada unidimensional. Para um gás monoatômico ideal de massa m confinado em cilindro como este, de comprimento l e área $A = \pi r^2$ da base, com $l \gg r$, faça o que se pede a seguir. (Assuma que a probabilidade de colisão entre as partículas ainda seja nula nessa situação)
- (a) Repita o procedimento da aula sobre a teoria cinética dos gases para obter a pressão na base do cilindro. Para isso, escreva:
- (i) A variação de momento após o choque de uma molécula do gás;
 - (ii) A força exercida na base do cilindro por uma molécula do gás;
 - (iii) A pressão exercida por uma molécula do gás;
 - (iv) A pressão de N moléculas;
- (b) Nesta situação, cada partícula de gás tem apenas 1 grau de liberdade. Compare seu resultado com a equação fundamental do Gás ideal. O resultado é compatível com o Teorema da Equipartição?
- Q 2.** Ainda na situação do exercício anterior, obtenha a função de distribuição de Maxwell-Boltzmann unidimensional. Para isso, siga o mesmo procedimento da aula considerando apenas o eixo x e responda:
- (a) Qual o valor da energia cinética média a ser considerada neste caso? Argumente.
 - (b) Qual a forma geral da distribuição de probabilidade $dp(v_x)$. (antes de definir as constantes)
 - (c) Use a condição de normalização para obter a relação entre as constantes.
 - (d) Use o valor médio da energia cinética (item (a)) para calcular as constantes em função da temperatura T e massa m do gás.
 - (e) Escreva a forma final de $dp(v_x)$ e a função distribuição de Maxwell-Boltzmann unidimensional.
 - (f) Compare com o resultado obtido para o caso 3D.

Resolução:

Q1.a) (i) $\Delta p_{xi} = -mv_{xi} - mv_{xi} = -2mv_{xi}$

(ii) $|F_i| = ma_i = \frac{|\Delta p_{xi}|}{\Delta t} = \frac{2mv_{xi}}{\frac{2l}{v_{xi}}} = \frac{mv_{xi}^2}{l}$

(iii) $P_i = \frac{|F_i|}{A} = \frac{mv_{xi}^2}{Al} = \frac{mv_{xi}^2}{V}$

(iv) $P = \sum_{i=1}^N P_i = \frac{m}{V} N \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_{xi}^2 = \frac{Nm}{V} \langle v_{xi}^2 \rangle = \rho \langle v_{xi}^2 \rangle$

$\rho = \frac{Nm}{V} \rightarrow$ densidade do gás

b) $P = \frac{2N}{V} \langle \frac{1}{2} mv_x^2 \rangle = \frac{2N}{V} \langle E \rangle \Rightarrow PV = N \cdot 2 \langle E \rangle$

Comparando com a equação geral do gás ideal,

$$2 \langle E \rangle = k_B T \Rightarrow \langle E \rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

Compatível com T.E.E.

Q2.a) Do T.E.E. para 1 grau de liberdade:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

b) Pelas 3 hipóteses de Maxwell para 1D, temos:

$$dp(v_x) = A e^{-\langle v_x^2 \rangle} dv_x$$

$$c) \int dp = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x = A \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1 \text{ (condição de normalização)}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$$

$$d) \langle E \rangle = \frac{1}{2} k_B T = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m v_x^2 e^{-\alpha v_x^2} dv_x = \frac{1}{2} m \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-\alpha v_x^2} dv_x$$

$$\Rightarrow k_B T = m \left(\frac{\alpha}{m} \right)^{1/2} \cdot 2 \cdot G_2 = 2 m \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{\alpha^3} \right)^{1/2} = m \alpha^{-1}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \beta m \Rightarrow A = \left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{1/2}, \text{ com } \beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$e) dp(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi} \right)^{1/2} \beta^{1/2} e^{-\frac{1}{2} \beta m v_x^2} dv_x$$

f) A distribuição de Maxwell-Boltzmann 1D é Gaussiana enquanto a 3D não é.