PME 2556 – Dinâmica dos Fluidos Computacional

Aula 7 – Discretização Temporal

Equação Geral de Transporte

$$\int_{\forall} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} d\forall + \int_{S} \rho u_j \phi n_j \, dA = \int_{S} \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} n_j \, dA + \int_{\forall} S_\phi \, d\forall$$

Resulta:

$$\boxed{\int_{\forall} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} d\forall = \underbrace{\sum a_{viz} \phi_{viz} + b - a_p \phi_p}_{f}}$$

Equação Geral de Transporte

Questões:

1) Como avaliar $\dfrac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}$;

2) Em que instante avaliar f.

Método de Euler explícito

$$(\rho\phi)^{t+\Delta t} = (\rho\phi)^{t} + \left.\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\right|^{t} \Delta t + o\left(\Delta t^{2}\right)$$

Resulta:

$$\frac{(\rho\phi)^{t+\Delta t} - (\rho\phi)^{t}}{\Delta t} = \left.\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\right|^{t} + o\left(\Delta t\right) \qquad \text{(1ª ordem)}$$

Aplicando ao método dos volumes finitos:

$$\boxed{\frac{(\rho\phi_P)^{t+\Delta t} - (\rho\phi_P)^{t}}{\Delta t}\forall = \left[\sum a_{viz}\phi_{viz} + b - a_p\,\phi_p\right]^{t}}$$

Método de Euler explícito

- É um método não-iterativo: basta avançar no tempo a partir de uma solução inicial;
- Tem precisão temporal de 1ª ordem;
- Tem problemas de estabilidade.

$$\frac{\rho\forall}{\Delta t}\phi_P^{t+\Delta t} = \left[\sum a_{viz}\phi_{viz} + b\right]^t + \left(\frac{\rho\forall}{\Delta t} - a_p\right)\phi_P^t$$

O coeficiente de $\phi_P{}^t$ tem que ser maior que zero para termos estabilidade:

$$\frac{\rho\forall}{\Delta t} - a_p \geq 0 \Rightarrow \Delta t \leq \frac{\rho\forall}{a_P}$$

Método de Euler implícito

$$(\rho\phi)^{t} = (\rho\phi)^{t+\Delta t} - \left.\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\right|^{t+\Delta t} \Delta t + o\left(\Delta t^{2}\right)$$

Resulta:

$$\frac{(\rho\phi)^{t+\Delta t} - (\rho\phi)^{t}}{\Delta t} = \left.\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\right|^{t+\Delta t} + o(\Delta t)$$ (1ª ordem)

Aplicando ao método dos volumes finitos:

$$\boxed{\frac{(\rho\phi_P)^{t+\Delta t} - (\rho\phi_P)^{t}}{\Delta t}\forall = \left[\sum a_{viz}\phi_{viz} + b - a_p\,\phi_p\right]^{t+\Delta t}}$$

Método de Euler implícito

- É um método iterativo;
- Tem precisão temporal de 1ª ordem;
- É um método incondicionalmente estável.

$$\left(\frac{\rho\forall}{\Delta t}+a_P\right)\phi_P^{t+\Delta t}=\left[\sum a_{viz}\phi_{viz}+b\right]^{t+\Delta t}+\left(\frac{\rho\forall}{\Delta t}\right)\phi_P^t$$

O coeficiente de ϕ_P^t é sempre maior que zero:

$$\frac{\rho\forall}{\Delta t}\geq 0$$

Método de Euler implícito

$$\underbrace{\left(\frac{\rho\forall}{\Delta t}+a_P\right)}_{a_P}\phi_P^{t+\Delta t}=\left[\sum a_{viz}\phi_{viz}\right]^{t+\Delta t}+\underbrace{b^{t+\Delta t}+\left(\frac{\rho\forall}{\Delta t}\right)\phi_P^{t}}_{b}$$

Observe que neste método temos um novo coeficiente a_P e um novo carregamento do sistema linear dados por:

$$a_P=a_P+\frac{\rho\forall}{\Delta t} \qquad b=b+\frac{\rho\forall}{\Delta t}\phi_P^t$$

$$a_P\phi_P=\sum a_{viz}\phi_{viz}+b$$

Satisfaz melhor o critério de Scarborough.

Método semi-implícito ou de Crank-Nicholson

$$(\rho\phi)^{t+\Delta t} = (\rho\phi)^{t} + \left.\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\right|^{t} \Delta t + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^{2}(\rho\phi)}{\partial t^{2}}\right|^{t} \Delta t^{2} + o(\Delta t^{3})$$

Junto com:

$$\left.\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\right|^{t+\Delta t} = \left.\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\right|^{t} + \left.\frac{\partial^{2}(\rho\phi)}{\partial t^{2}}\right|^{t} \Delta t + o(\Delta t^{2})$$

Resulta em:

$$\frac{(\rho\phi)^{t+\Delta t} - (\rho\phi)^{t}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\right|^{t} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\right|^{t+\Delta t} + o(\Delta t^{2})$$

Aplicando ao método dos volumes finitos:

$$\boxed{\frac{(\rho\phi_P)^{t+\Delta t} - (\rho\phi_P)^{t}}{\Delta t}\forall = \frac{1}{2}\left[\sum a_{viz}\phi_{viz} + b - a_p\,\phi_p\right]^{t+\Delta t} + \frac{1}{2}\left[\sum a_{viz}\phi_{viz} + b - a_p\,\phi_p\right]^{t}}$$

Método semi-implícito ou de Crank-Nicholson

- É um método iterativo;
- Tem precisão temporal de 2ª ordem;
- Tem restrições para estabilidade.

$$\left(\frac{2\rho\forall}{\Delta t}+a_P\right)\phi_P^{t+\Delta t}=\left(\frac{2\rho\forall}{\Delta t}-a_P\right)\phi_P^{t}+\left[\sum a_{viz}\phi_{viz}+b\right]^{t+\Delta t}+\left[\sum a_{viz}\phi_{viz}+b\right]^{t}$$

O coeficiente de $\phi_P{}^t$ tem que ser maior que zero para termos estabilidade:

$$\frac{2\rho\forall}{\Delta t}-a_p\geq 0 \Rightarrow \Delta t\leq\frac{2\rho\forall}{a_P}$$

Método semi-implícito ou de Crank-Nicholson

$$\underbrace{\left(\frac{2\rho\forall}{\Delta t}+a_P\right)}_{a_P}\phi_P^{t+\Delta t}=\left[\sum a_{viz}\phi_{viz}\right]^{t+\Delta t}+\underbrace{b^{t+\Delta t}+\left[\sum a_{viz}\phi_{viz}\right]^{t}+b^{t}+\left(\frac{2\rho\forall}{\Delta t}-a_P\right)\phi_P^{t}}_{b}$$

Observe que neste método temos um novo coeficiente a_P e um novo carregamento do sistema linear dados por:

$$a_P=a_P+\frac{2\rho\forall}{\Delta t} \qquad b=b^{t+\Delta t}+\left[\sum a_{viz}\phi_{viz}\right]^{t}+b^{t}+\left(\frac{2\rho\forall}{\Delta t}-a_P\right)\phi_P^{t}$$

Resultando novamente num sistema do tipo:

$$a_P\phi_P=\sum a_{viz}\phi_{viz}+b$$

Método implícito de 2ª ordem (2nd order backward scheme)

$$(\rho\phi)^{t} = (\rho\phi)^{t+\Delta t} + \left.\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\right|^{t+\Delta t}(-\Delta t) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^{2}(\rho\phi)}{\partial t^{2}}\right|^{t+\Delta t}(-\Delta t)^{2} + o(\Delta t^{3})$$

Junto com:

$$(\rho\phi)^{t-\Delta t} = (\rho\phi)^{t+\Delta t} + \left.\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\right|^{t+\Delta t}(-2\Delta t) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^{2}(\rho\phi)}{\partial t^{2}}\right|^{t+\Delta t}(-2\Delta t)^{2} + o(\Delta t^{3})$$

Resulta em:

$$\frac{3(\rho\phi)^{t+\Delta t} - 4(\rho\phi)^{t} + (\rho\phi)^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = \left.\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\right|^{t+\Delta t} + o(\Delta t^{2})$$

Aplicando ao método dos volumes finitos:

$$\boxed{\frac{3(\rho\phi_P)^{t+\Delta t} - 4(\rho\phi_P)^{t} + (\rho\phi_P)^{t-\Delta t}}{2\Delta t}\forall = \left[\sum a_{viz}\phi_{viz} + b - a_p\,\phi_p\right]^{t+\Delta t}}$$

Método implícito de 2ª ordem (2nd order backward scheme)

- É um método iterativo;
- Tem precisão temporal de 2ª ordem;
- Muito mais estável que o Método de Crank-Nicholson.

Bibliografia

Versteeg, H,K; Malalasekera, W., “An introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method”, 2nd Edition, Pearson Education Limited, 2007.

Maliska, C.R., “Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional, LTC editora, 1995.

Apsley, D., CFD Lecture Notes, University of Manchester, Spring 2007.