PLANTÃO DE DÚVIDAS DO DIA 13 DE SETEMBRO

EXERCÍCIOS A SEREM RESOLVIDOS:

9 - d (LISTA 1) OK!

9 - a (LISTA 1) OK!

17 e 18 (LISTA 3) OK!

4 (LISTA 3) OK!

9 - c (LISTA 2) OK!

12-b e 12-d (LISTA 3) OK!

13 - c (LISTA 3) OK!

LISTA 1

9)

d) $$\begin{cases} ax + bz = 2 \\ ax + ay + 4z = 4 \\ \quad\quad ay + 2z = 6 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO. Como

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & 6 \end{array}\right) \underset{L_2' := L_2 - L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ 0 & a & 4-b & 2 \\ 0 & a & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3'' := L_3' - L_2'}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ 0 & a & 4-b & 2 \\ 0 & 0 & b-2 & b-2 \end{array}\right),$$

O sistema inicial é equivalente a

$$\begin{cases} ax + bz = 2 \\ ay + (4-b)z = 2. \\ (b-2)z = b-2 \end{cases}$$

Temos vários casos a considerar:

PRIMEIRO CASO: $b=2$.

Nesse caso, o sistema inicial é equivalente a

$$\begin{cases} ax + 2z = 2 \\ ay + 2z = 2 \end{cases}.$$

(i) Se $a=0$, o sistema é equivalente a $\{2z=2$, ou, ainda, a $\{z=1$. Logo, nesse caso, ele é possível e indeterminado, e seu conjunto solução é

$$S := \{(x,y,1) : x,y \in \mathbb{R}\}.$$

(ii) Se $a \neq 0$, então

$$\begin{cases} ax + 2z = 2 \\ ay + 2z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x = \dfrac{2-2z}{a} \\ y = \dfrac{2-2z}{a} \end{cases}.$$

Logo, nesse caso, o sistema é possível e indeterminado, e seu conjunto solução é

$$S := \left\{ \left(\frac{2-2z}{a}, \frac{2-2z}{a}, z \right) : z \in \mathbb{R} \right\}.$$

SEGUNDO CASO : $b \neq 2$.

Nesse caso, o sistema é equivalente a

$$\begin{cases} ax + bz = 2 \\ ay + (4-b)z = 2 \\ z = 1 \end{cases},$$

ou, ainda, a

$$\begin{cases} ax = 2-b \\ ay = b-2. \\ z = 1 \end{cases}$$

(i) Se $a = 0$, o sistema é equivalente a

$$\begin{cases} 0 = 2-b \\ 0 = b-2 \\ z = 1 \end{cases}.$$

E, como esse sistema é impossível (pois $b \neq 2$), disso resulta que o sistema inicial é também impossível (isto é, que ele não possui soluções).

(ii) Se $a \neq 0$, o sistema é equivalente a

$$\begin{cases} x = \dfrac{2-b}{a} \\ y = \dfrac{b-2}{a} \\ z = 1 \end{cases}.$$

Logo, nesse caso, o sistema é possível e determinado, e seu conjunto solução é

$$S := \left\{ \left(\frac{2-b}{a}, \frac{b-2}{a}, 1 \right) \right\}.$$

a) $\begin{cases} ax + y = -1 \\ 2x + y = 6 \end{cases}.$

RESOLUÇÃO.

Como

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{array} \right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 6 \\ a & 1 & -1 \end{array} \right) \underset{L_2'' := L_2' - \frac{a}{2} \cdot L_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 6 \\ 0 & \frac{2-a}{2} & \frac{-2-ab}{2} \end{array} \right)$$

$$\underset{L_2''' := 2L_2''}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2-a & -2-ab \end{array} \right),$$

o sistema inicial é equivalente a

$$\begin{cases} 2x + y = b. \\ (2-a)y = -(2+ab) \end{cases}$$

Temos vários casos a considerar:

PRIMEIRO CASO: $a=2$.

Nesse caso, o sistema é equivalente a

$$\begin{cases} 2x + y = b. \\ 0 = -(2+2b) \end{cases}$$

(i) Se $b=-1$, o sistema é equivalente a

$$\begin{cases} 2x + y = -1. \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Portanto, nesse caso, ele é possível e indeterminado, e seu conjunto solução é

$$S := \{(x, -1-2x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

(ii) Se $b \neq -1$, o sistema é equivalente a um sistema impossível e, portanto, é também impossível.

SEGUNDO CASO: $a \neq 2$.

Se $a \neq 2$, então

$$\begin{cases} 2x + y = b \\ (2-a)y = -(2+ab) \end{cases} \sim \begin{cases} x = \dfrac{b-y}{2} \\ y = \dfrac{-(2+ab)}{2-a} \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x = \dfrac{1+b}{2-a} \\ y = -\left(\dfrac{2+ab}{2-a}\right) \end{cases}$$

Logo, nesse caso, o sistema inicial é possível e determinado, e seu conjunto solução é

$$S := \left\{\left(\frac{1+b}{2-a}, \frac{-2-ab}{2-a}\right)\right\}.$$

LISTA 3

17) Sejam $U := \{(x,0,0) : x \in \mathbb{R}\}$, e $V := \{(0,y,0) : y \in \mathbb{R}\}$ subespaços de $\mathbb{R}^3$. Determine $U+V$ e o interprete geometricamente.

RESOLUÇÃO.

Como

$$\begin{aligned} U+V &= \{u + v : u \in U, \text{e } v \in V\} \\ &= \{(x,0,0) + (0,y,0) : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y,0) : x, y \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

$U+V$ é o plano $z=0$.

18) Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, e sejam W_1 e W_2 subespaços de V.

a) Mostre que $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V.

DEMONSTRAÇÃO.

(i) É claro que $0_V \in W_1 \cap W_2$, pois, como W_1 e W_2 são subespaços de V, $0_V \in W_1$, e $0_V \in W_2$.

(ii) Se $u, v \in W_1 \cap W_2$, então $u, v \in W_1$, e $u, v \in W_2$. Logo, nesse caso, $u+v \in W_1$ (pois W_1 é um subespaço de V), e $u+v \in W_2$ (pois W_2 é um subespaço de V), e, portanto, $u+v \in W_1 \cap W_2$.

(iii) Se $v \in W_1 \cap W_2$, então $v \in W_1$, e $v \in W_2$. Logo, nesse caso, para cada $a \in \mathbb{R}$, $av \in W_1$ (pois W_1 é um subespaço de V), e $av \in W_2$ (pois W_2 é um subespaço de V), e, portanto, $av \in W_1 \cap W_2$.

Em vista de (i), de (ii) e de (iii), podemos concluir que $W_1 \cap W_2$ é um subespaço vetorial de V.

b) Mostre que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço de V se, e somente se, $W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$.

DEMONSTRAÇÃO.

Se $W_1 \subseteq W_2$, então $W_1 \cup W_2 = W_2$ e, portanto, é subespaço de V. Analogamente, se $W_2 \subseteq W_1$, então $W_1 \cup W_2 = W_1$ e, portanto, é subespaço de V. Vamos mostrar, a seguir, que, se $W_1 \not\subseteq W_2$, e se $W_2 \not\subseteq W_1$, então $W_1 \cup W_2$ não é um subespaço de V. Para isso, suponhamos, por absurdo, que $W_1 \cup W_2$ seja subespaço de V. Como, por hipótese, $W_1 \not\subseteq W_2$, e $W_2 \not\subseteq W_1$, podemos fixar w_1 e w_2 em V de modo que $w_1 \in W_1 \setminus W_2$, e $w_2 \in W_2 \setminus W_1$. Feito isso, notemos que, como $w_1 \in W_1 \subseteq W_1 \cup W_2$, e $w_2 \in W_2 \subseteq W_1 \cup W_2$, $w_1, w_2 \in W_1 \cup W_2$. Por sua vez, como $w_1, w_2 \in W_1 \cup W_2$, e $W_1 \cup W_2$ é subespaço de V, $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$. Logo, ou $w_1 + w_2 \in W_1$, ou $w_1 + w_2 \in W_2$. Mas, se $w_1 + w_2$ pertencesse a W_1, então, como

$$w_2 = \underbrace{(w_1 + w_2)}_{\in W_1} + \underbrace{(-w_1)}_{\in W_1},$$

$w_2 \in W_1$ — o que seria um absurdo, pois $w_2 \in W_2 \setminus W_1$.

E, se $w_1 + w_2$ pertencesse a W_2, então, como

$$w_1 = \underbrace{(w_1 + w_2)}_{\in W_2} + \underbrace{(-w_2)}_{\in W_2},$$

$w_1 \in W_2$ — o que também seria um absurdo, pois $w_1 \in W_1 \setminus W_2$.

Portanto, se $W_1 \not\subseteq W_2$, e se $W_2 \not\subseteq W_1$, então $W_1 \cup W_2$ não é um subespaço de V.

4) No espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, sejam $u := (1,1)$, $v := (1,2)$ e $w := (2,1)$. Obtenha números reais a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 e c_2 tais que $a_1 \neq a_2$, $b_1 \neq b_2$ e $c_1 \neq c_2$, e tais que

$$a_1 u + b_1 v + c_1 w = a_2 u + b_2 v + c_2 w.$$

RESOLUÇÃO.

Observe que

$$1.u + 1.v + 1.w = (4,4) = 4u = 4u + 0.v + 0.w,$$

que $1 \neq 4$, e que $1 \neq 0$.

LISTA 2

9)

c) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & c & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

RESOLUÇÃO.

Como

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & c & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & c & 1 \\ 0 & 0 & c \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3'' := L_3' - c.L_1'}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & c & 1 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & -c^2 & -c \end{pmatrix} \underset{L_2'' \leftrightarrow L_3''}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & c & 1 \\ 0 & -c^2 & -c \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} =: A'$$

temos dois casos a considerar:

(i) se $c \neq 0$, então A' não possui linhas nulas, e, portanto, A tem inversa; (Nesse caso, a forma escalonada reduzida de A é I_3.)

(ii) se $c = 0$, então A' tem linhas nulas, e, portanto, A não tem inversa.

(Nesse caso, a forma escalonada reduzida de A não é I_3.)

TEOREMA. Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ tem inversa se, e somente se, sua forma escalonada reduzida é I_n (ou, equivalentemente, se e somente se, ao escalonarmos A, obtemos uma matriz sem linhas nulas).

LISTA 3

12)

b) $W = \{p(t) \in P(\mathbb{R}) : p(t) = p(-t)\}$.

RESOLUÇÃO.

PRIMEIRA PARTE.

Seja $p(t) := a_0 + \ldots + a_n t^n$ em $P(\mathbb{R})$. Note que $p(-t) = b_0 + \ldots + b_n t^n$, em que, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $b_j = (-1)^j a_j$. Logo,

$$p(t) = p(-t) \iff (\forall j \in \{1, \ldots, n\})(a_j = (-1)^j a_j).$$

Mas, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$(-1)^j a_j = \begin{cases} a_j, \text{ se } j \text{ é par} \\ -a_j, \text{ se } j \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Consequentemente,

$$p(t) = p(-t) \iff \text{para cada } j \text{ ímpar em } \{1, \ldots, n\},\ a_j = 0.$$

Portanto,

$$W = \left\{ p(t) \in P(\mathbb{R}) : \begin{array}{l} \text{os coeficientes dos termos de } p(t) \\ \text{de grau ímpar são todos nulos} \end{array} \right\}.$$

SEGUNDA PARTE.

Observe que:

(i) $O(t) \in W$, pois todos os seus coeficientes são nulos;
↳ polinômio nulo

(ii) se $p(t) := a_0 + \cdots + a_n t^n$ e $q(t) := b_0 + \cdots + b_n t^n$ pertencem a W, então, para cada j ímpar em $\{1, \ldots, n\}$, $a_j + b_j = 0 + 0 = 0$, e, como

$$p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + \cdots + (a_n + b_n)t^n,$$

disso resulta que, nesse caso, $p(t) + q(t) \in W$;

(iii) se $p(t) := a_0 + \cdots + a_n t^n$ pertence a W, e se $a \in \mathbb{R}$, então, para cada j ímpar em $\{1, \ldots, n\}$, $a \cdot a_j = a \cdot 0 = 0$, e, como

$$a p(t) = (a a_0) + \cdots + (a a_n)t^n,$$

disso decorre que, nesse caso, $a p(t) \in W$.

Em vista de (i), de (ii) e de (iii), podemos concluir que W é um subespaço vetorial de $P(\mathbb{R})$.

d) $W = \{ p(t) \in P(\mathbb{R}) : \text{grau}(p(t)) \geq 3 \}$

RESOLUÇÃO: W não é um subespaço vetorial de $P(\mathbb{R})$, pois $O(t) \notin W$.

13)

c) $V = P_3(\mathbb{R})$, e $W = \{p \in V : p(1) = 0\}$.

RESOLUÇÃO: W é subespaço de $P_3(\mathbb{R})$, pois:

(i) $\mathbf{0} \in W$ (já que $\mathbf{0}(1) = 0$);

(ii) se $p(t) := a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ e $q(t) := b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$ pertencem a W, então, como

$$(p+q)(t) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)t + (a_2+b_2)t^2 + (a_3+b_3)t^3,$$

$$\begin{aligned}(p+q)(1) &= (a_0+b_0) + (a_1+b_1) + (a_2+b_2) + (a_3+b_3)\\ &= \underbrace{(a_0+a_1+a_2+a_3)}_{=0\ (\text{pois } p \in W)} + \underbrace{(b_0+b_1+b_2+b_3)}_{=0\ (\text{pois } q \in W)}\\ &= 0 + 0 = 0,\end{aligned}$$

e, portanto, $p+q \in W$;

(iii) se $a \in \mathbb{R}$, e se $p(t) := a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ pertence a W, então, como

$$(ap)(t) = (aa_0) + (aa_1)t + (aa_2)t^2 + (aa_3)t^3,$$

$$\begin{aligned}(ap)(1) &= a.a_0 + a.a_1 + a.a_2 + a.a_3\\ &= a\underbrace{(a_0+a_1+a_2+a_3)}_{=0\ (\text{pois } p \in W)} = a.0 = 0,\end{aligned}$$

e, portanto, $ap \in W$.