A INTEGRAL DE RIEMANN EM TRÊS VARIÁVEIS

1. Integral em paralelepípedos

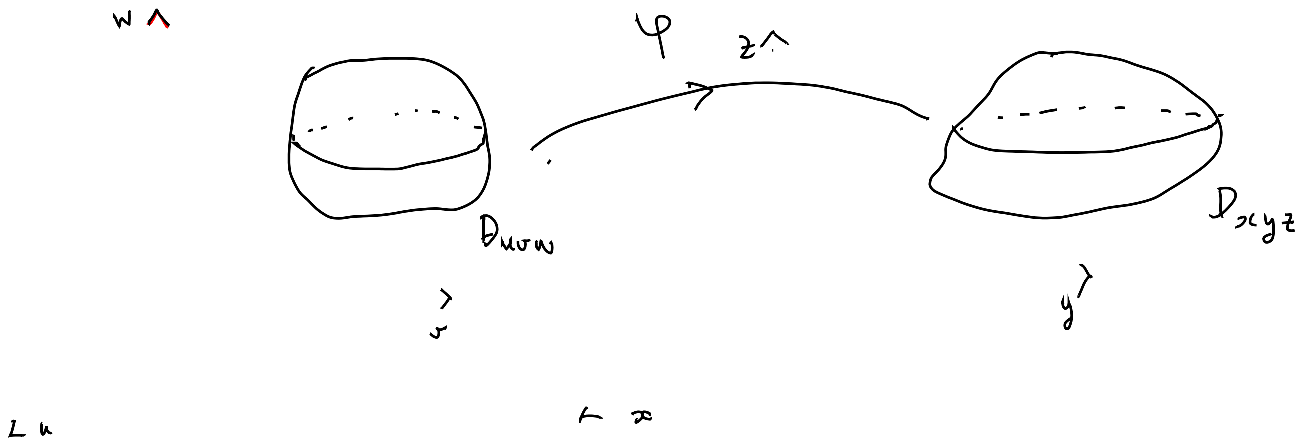
2. Integral em domínios limitados do espaço

3. Integrais iteradas e o Teorema de Fubini

4. Mudança de variáveis

Uma **transformação** (ou mudança de variáveis) no espaço $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação

$$\varphi : D_{uvw} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(u, v, w) \mapsto \varphi(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)).$$



Date: September 13, 2023.

A transformação φ é contínua, de classe $\mathcal{C}^1$, etc. se as *funções coordenadas* $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$ e $z(u,v,w)$ o forem.

Se φ é de classe $\mathcal{C}^1$, podemos definir sua matriz de derivadas, ou *matriz Jacobiana* por

$$D\varphi(u,v,w) := \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

O determinante de $D\varphi(u,v,w)$ é denominado **Jacobiano** da transformação φ no ponto (u,v,w) e denotado por $J\varphi(u,v,w)$ ou $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$.

Exemplo 4.1. $T : (u,v,w)) \mapsto (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,vw)$, *sendo*

$$\begin{cases} x(u,v,w) = u^3 - 2v \\ y(u,v,w) = v^2 + 2w - 3 \\ z(u,v,w) = u - 3w \end{cases}$$

$$JT(u,v,w) := \begin{vmatrix} 3u^2 & 0 & 1 \\ -2 & 2v & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -18u^2v - 4.$$

Vale o seguinte resultado:

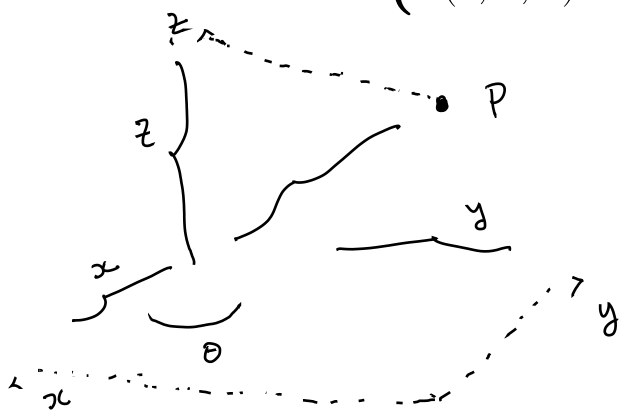
Teorema 4.2. *Seja $D_{uvw} \subset \mathbb{R}^3$ domínio limitado com fronteira de conteúdo nulo e $\varphi(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ uma transformação de classe $\mathcal{C}^1$ em um aberto contendo D_{uvw}, injetora no interior de D e $J\varphi(u,v,w) \neq 0$ para todo (u,v,w) no interior de D. Nessas condições, se $f(x,y,z)$ for contínua em $D_{xyz} = \varphi(D_{uvw})$ então*

$$\iiint_{D_{xyz}} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{D_{uvw}} f(\varphi(u,v,w))\,|J\varphi(u,v,w)|\,dudvdw$$
$$= \iiint_{D_{uv}} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J\varphi(u,v,w)|\,dudvdw.$$

Observação 4.3. *O resultado ainda vale se supusermos apenas que f e $f\circ\varphi$ são integráveis em D_{xy} e D_{uv}, respectivamente.*

4.1. **Coordenadas cilíndricas (polares no espaço).** Uma mudança de coordenadas no espaço, parente das coordenadas polares no plano é dada pela transformação
$\varphi : (r,\theta,z) \mapsto (x(r,\theta,\varphi), y(r,\theta,z)$, sendo

$$\begin{cases} x(r,\theta,z) = r\,\mathrm{sen}\,(\theta) \\ y(r,\theta,z) = r\cos(\theta) \\ z(r,\theta,z) = z \end{cases}$$

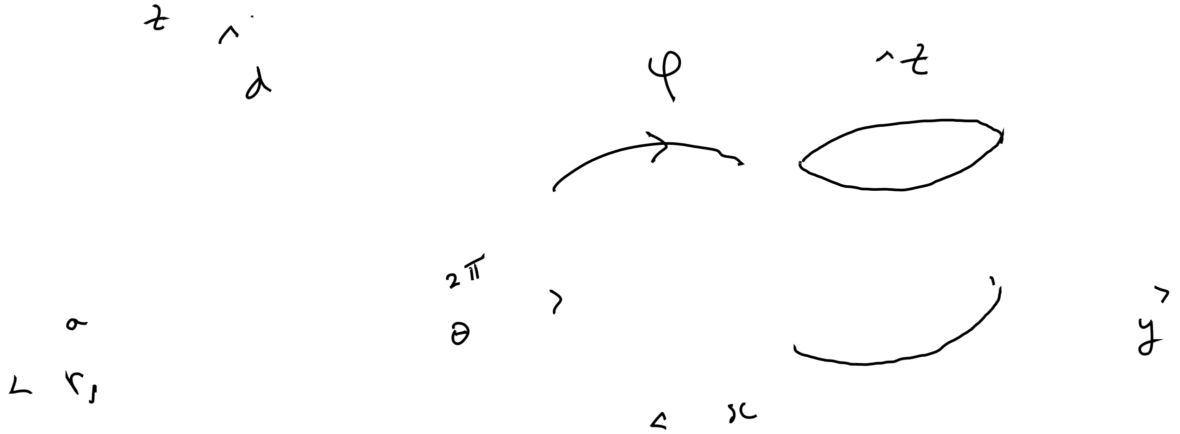


Se $\Omega = \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi] \times \mathbb{R}$ então φ é injetora em $\overset{\circ}{\Omega}$ e

$$J\varphi = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\mathrm{sen}\,(\theta) & 0 \\ \mathrm{sen}\,(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \text{ em } \overset{\circ}{\Omega}\,.$$

Devido ao significado geométrico da transformação φ podemos, em muitos casos de interesse, identificar o domínio $D_{r\theta z}$ cuja imagem por φ é o domínio de integração D_{xyz} e o primeiro resulta ser mais conveniente para a integração.

Em particular, a imagem do paralelepípedo $W = [0,a] \times [0, 2\pi] \times [c,d]$ é o cilindro $C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2, c \leq z \leq d\}$.



Exemplo 4.4. *Calcule as seguintes integrais (Lista 3 - Ex3):*

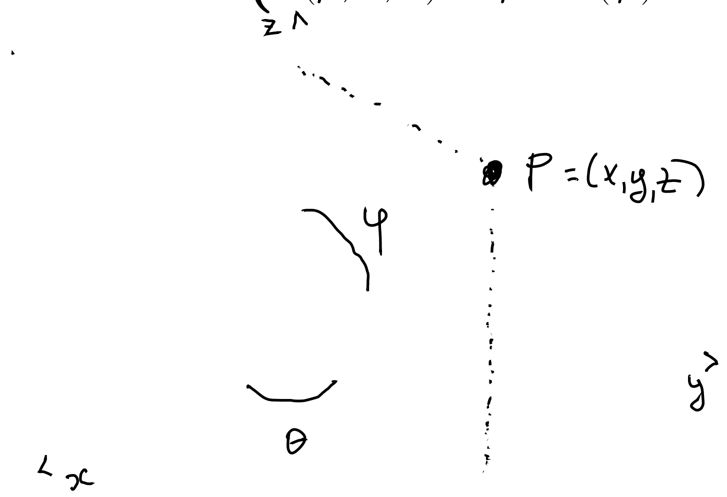
(a) $\iiint_E (x^2+y^2)\, dxdydz$, *onde* E *é a região limitada pelo cilindro* $x^2+y^2 = 4$ *e pelos planos* $z=-1$ *e* $z = 2$.

(b) $\iiint_E y\, dxdydz$, *onde* E *é a região entre os cilindros* $x^2+y^2 = 4$ *e* $x^2+y^2=1$, *limitada pelo plano* xy *e pelo plano* $z = x+2$.

(c) $\iiint_E x^2\, dxdydz$, *onde* E *é o sólido limitado pelo cilindro* $x^2 + y^2 = 1$, *pelo cone* $z^2 = 4x^2+4y^2$ *e contido no semiespaço* $z \geq 0$. *Resp. (a)* 24π, *(b)* 0, *(c)* $2\pi/5$.

4.2. **Coordenadas esféricas.** Uma outra mudança de coordenadas no espaço bastante importante, é dada pela transformação:
$\psi : (\rho, \theta, \varphi) \mapsto (x(\rho,\theta,\varphi), y(\rho,\theta,\varphi), z(\rho,\theta,\varphi))$, sendo

$$\begin{cases} x(\rho,\theta,\varphi) = \rho\,\mathrm{sen}\,(\varphi)\,\cos(\theta) \\ y(\rho,\theta,\varphi) = \rho\,\mathrm{sen}\,(\varphi)\,\mathrm{sen}\,(\theta) \\ z(\rho,\theta,z) = \rho\,\cos(\varphi) \end{cases}$$

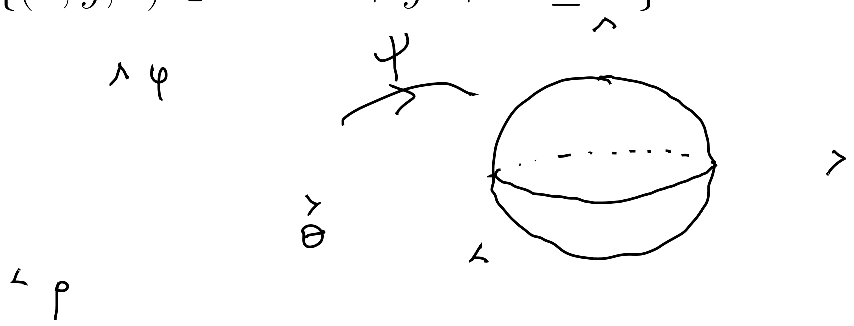


Se $\Omega = \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$ então ψ é injetora em $\mathring{\Omega}$ e

$$J\psi = \begin{vmatrix} \mathrm{sen}\,(\varphi)\,\cos(\theta) & \mathrm{sen}\,(\varphi)\,\mathrm{sen}\,(\theta) & \cos(\varphi) \\ \rho\cos(\varphi)\,\cos(\theta) & \rho\cos(\varphi)\,\mathrm{sen}\,(\theta) & -\rho\mathrm{sen}\,(\varphi) \\ -\rho\mathrm{sen}\,(\varphi)\mathrm{sen}\,(\theta) & \rho\mathrm{sen}\,(\varphi)\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\,\mathrm{sen}\,(\varphi) \text{ em } \mathring{\Omega}\,.$$

Devido ao significado geométrico da transformação ψ podemos, em muitos casos de interesse, identificar o domínio $D_{\rho,\theta,\varphi}$ cuja imagem por ψ é o domínio de integração D_{xyz} e o primeiro resulta ser mais conveniente para a integração.

Em particular, a imagem do paralelpípedo $W = [0,a]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$ é a bola $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}$.



Exemplo 4.5. *Calcule as seguintes integrais (Lista 3 - Ex6):*

(a) $\iiint_B (x^2+y^2+z^2)\, dxdydz$*, onde* B *é a bola unitária* $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

(b) $\iiint_E y^2\, dxdydz$*, onde* E *é a parte da bola unitária* $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ *contida no primeiro octante.*

(c) $\iiint_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$*, onde* E *é a região interior ao cone* $\phi = \pi/6$ *e à esfera* $\rho = 2$.

Resp. (a) $4\pi/5$*, (b)* $\pi/30$*, (c)* $4\pi(2-\sqrt{3})$.