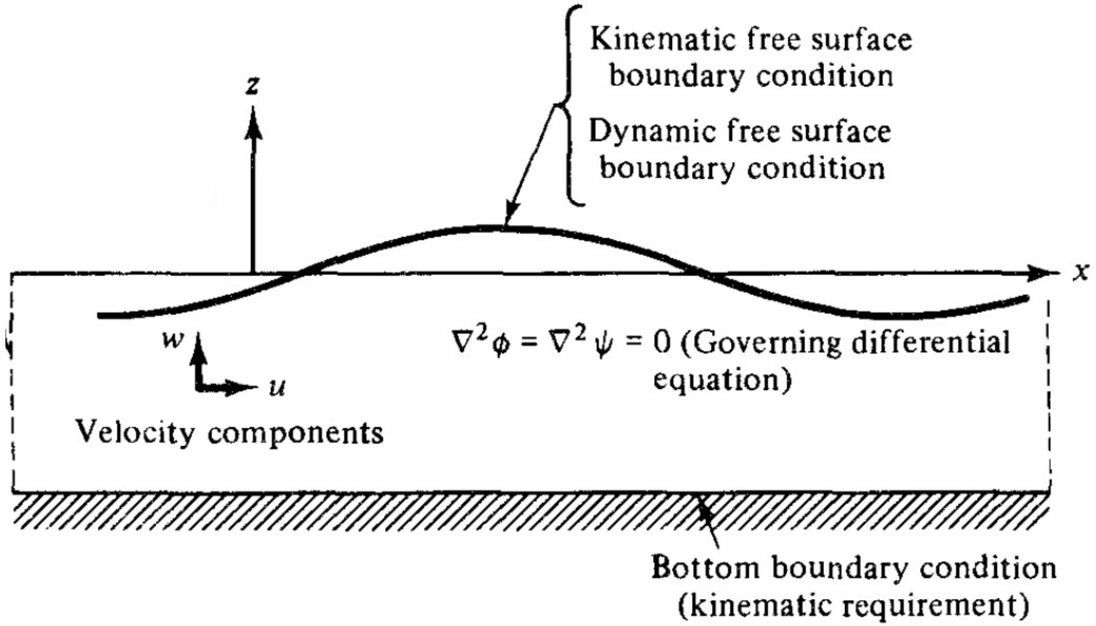
Hidrodinâmica I

Introdução à Teoria de Ondas de Gravidade

PNV3323 – Hidrodinâmica I
Prof. Dr. Jordi Mas Soler
Jordi.msoler@usp.br

Problema de Valor de Contorno

O problema associado à onda plana progressiva regular, já devidamente linearizado:



1. No fundo: ***z* = −h**

$$\frac{\partial\phi(x,y,z,t)}{\partial z} = 0\Big|_{z=-h}$$

2. Na superfície-livre: ***z* = *ζ*(*x*, *t*)**

$$\frac{\partial^2\phi(x,y,z,t)}{\partial t^2} + g\,\frac{\partial\phi(x,y,z,t)}{\partial z} = 0\Big|_{z=0}$$

PNV USP

Solução do PVC de onda livre

A solução pode ser obtida via *Método da Separação de Variáveis*, cujo princípio consiste em escrever:

$$\phi(x, z, t) = \mathrm{X(x)Z(z)T(t)}$$

O processo completo pode ser encontrado, p.ex., em *Dean & Dalrimple*, *seção 3.4*, mas aqui tomaremos um "atalho", observando que:

$X(x)$: função periódica com λ $\longrightarrow$ $Re\{e^{\pm ikx}\}$

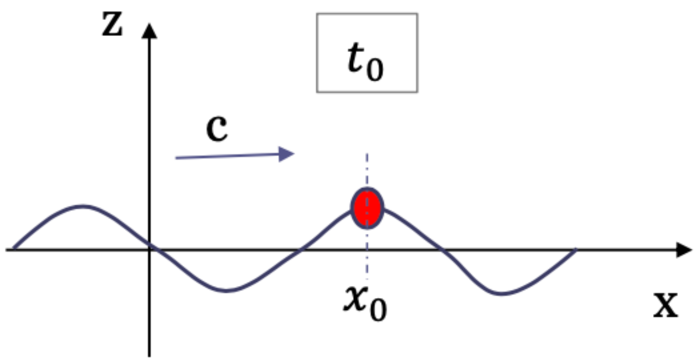
$T(t)$: função periódica com T $\longrightarrow$ $Re\{e^{\pm i\omega t}\}$

PNV USP

Solução do PVC de onda livre

E também o caráter *progressivo* da onda, cuja fase se mantém constante para uma velocidade $c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$.

Ou seja, *se a onda se propagar no sentido x*+, e quisermos acompanhar a progressão de uma fase qquer (p. ex. uma crista de onda):



$$x(t) = x_0 + c(t - t0)$$

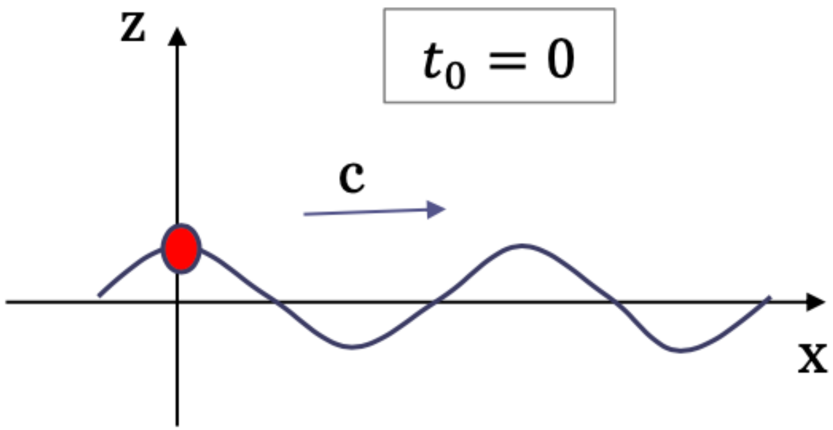
$$x(t) - x_0 = \frac{\omega}{k}(t - t0)$$

Fase $\quad kx(t) - \omega t = kx_0 - \omega t_0 = cte = \delta$

Solução do PVC de onda livre

Suponhamos, então, que, *por convenção*, a onda que queremos descrever tinha uma crista na origem (0,0) no instante t=0.

Então, a equação de onda pode ser, *por exemplo*:



$$\zeta(x,t) = A cos(kx - \omega t)$$

ou:

$$\zeta(x,t) = A sin(kx - \omega t + \pi/2)$$

Solução do PVC de onda livre

Podemos usar a seguinte função que atende às características esperadas:

$$X(x)T(t) = \mathrm{Re}\{e^{\pm i(kx-\omega t+\delta_0)}\}$$

Ou (convenção):

$$X(x)T(t) = \mathrm{Re}\{e^{-i(kx-\omega t)}\}$$

Sendo uma possível solução:

$$\phi(x,z,t) = Re\{P(z)e^{-i(kx-\omega t)}\}$$

PNV USP

Solução do PVC de onda livre

Obtenção de *P(z):*

1) Da equação de Laplace:

$$\nabla^2\ \phi(x, z, t) = 0$$

$$\nabla^2\ [P(z)\mathrm{e}^{-i(kx-\omega t)}] = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 P(z)}{\partial z^2} - k^2 P(z) = 0 \qquad \text{(EDO)}$$

Cuja solução é dada por:

$$P(z) = C_1 e^{\lambda_1 z} + C_2 e^{\lambda_2 z}$$

Solução do PVC de onda livre

Obtenção de *P(z)*:

Sendo a equação característica:

$$\lambda^2 - k^2 = 0$$

Logo:

$$P(z) = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}$$

PNV USP

Solução do PVC de onda livre

2) Da condição de impermeabilidade no fundo:

$$\frac{\partial\phi(x,z,t)}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P(x,-h,t)}{\partial z} = 0$$

Satisfeita se:

$kC_1e^{-kh} - kC_2e^{kh} = 0$, sendo: $C_1 = Ce^{-kh}$ e $C_2 = Ce^{kh}$

Solução do PVC de onda livre

3) Da condição dinâmica:

$$\zeta(x,t) = -\frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t} = Re\left\{-\frac{i\omega}{g}C\cosh(kh)e^{-i(kx-\omega t)}\right\}$$

Logo podemos escrever que: $-\frac{i\omega}{g}C\cosh(\mathrm{kh}) = \mathrm{A}$

Finalmente:

$$\phi(x,z,t) = \frac{gA}{\omega}\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh(kh)}\sin(kx-\omega t)$$

Solução do PVC de onda livre

É facil verificar, da condição cinemática para *z=0,* que:

$$\phi(x,z,t) = \frac{gA}{\omega}\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh(kh)}\sin(kx-\omega t)$$

E:

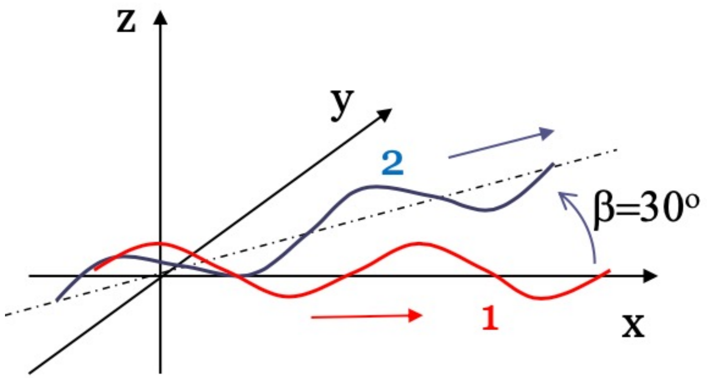
$$\zeta(x,t) = A cos(kx - \omega t)$$

$$\omega^2 = gktanh\,(kh)$$

Relação de dispersão da onda linear em profundidade constante h

Solução do PVC de onda livre

Exercício: Suponha a sobreposição de duas ondas planas que se propagam nas direções indicadas na figura. Sabe-se que:



$A_1 = 1{,}0$ m $\quad \lambda_1 = 50$m $\quad T_1 = 5{,}66$ s

$\zeta_1(0,0,0) = 0\text{m} \qquad \zeta_1(0,0,T_1/4) = -1{,}0\text{m}$

$A_2 = 2{,}0$ m $\quad \lambda_2 = 100$m $\quad T_2 = 8{,}0$ s

$\zeta_2(0,0,0) = 1{,}5\text{m} \qquad \zeta_2(0,0,T_2/4) = +1{,}32\text{m}$

Considere, então, a existência de uma boia na posição (x,y) = (40,200) m

Pergunta-se: qual será a elevação de onda medida pela boia no instante t=30s?

R: -0.48m

Solução do PVC de onda livre

Exercício: Uma onda de mar tem período T=10s. Determine qual será seu comprimento (λ) nas seguintes profundidades:

- h = 10m
- h = 100m
- h = 300m