Exercícios 1, 5 e 6 da segunda lista de Álgebra Linear I

Denis de Assis Pinto Garcia

13 de setembro de 2023

Exercício 1.

Em cada item, exiba exemplos de matrizes A e B tais que:

(a) $AB \neq BA$;

(b) $AB = BA$;

(c) AB está definida, porém BA não;

(d) $A \neq I_n$, $B \neq I_n$, e $AB = I_n$;

(e) $AB = I_n$, porém $BA \neq I_n$;

(f) $A \neq B$, e $A^2 = B^2$.

Resolução.

(a) Se $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, e se $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, então $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, mas $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Se A e B em $M_n(\mathbb{R})$ são tais que $A = B$, então, em particular, $AB = BA$.

(c) Se m, n e p em $\mathbb{N}^*$ são tais que $m \neq p$, então, para quaisquer $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, AB está definida, mas BA não está.

(d) Se $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, então $A \neq I_2$, $B \neq I_2$, e $AB = I_2$.

(e) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, e se $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, então $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, mas $BA = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(f) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é tal que $A \neq 0_n$, e se $B = -A$, então $A \neq B$, mas $A^2 = B^2$. Da mesma forma, se $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, e se $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, então $A \neq B$, mas $A^2 = B^2$.

Exercício 5.

Demonstre ou dê um contraexemplo para a seguinte afirmação: "se a soma de matrizes $AB + BA$ estiver definida, então A e B devem ser matrizes quadradas do mesmo tamanho".

Resolução.

Suponhamos que A possua m linhas e n colunas, e que B possua k linhas e p colunas. Como, por hipótese, $AB+BA$ está definida, AB e BA estão ambas definidas. Mas, se AB está definida, então o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B (isto é, $n = k$). Da mesma forma, se BA está definida, então o número de colunas de B é igual ao número de linhas de A, e, portanto, $p = m$. Logo, B tem n linhas e m colunas.

Consequentemente, AB é uma matriz quadrada de ordem m, e BA é uma matriz quadrada de ordem n. E, como só podemos somar matrizes de "mesmo tamanho" e sabemos que $AB + BA$ está definida, disso concluímos, por fim, que $m = n$.

Exercício 6. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz tal que o sistema $AX = 0$ tenha apenas a solução trivial. Mostre que o sistema $A^k X = 0$ também tem apenas a solução trivial qualquer que seja o inteiro $k \geq 1$.

Resolução.

Para cada $k \in \{1, 2, \ldots\}$, seja
$$P(k) \equiv (A^k X = 0 \Rightarrow X = 0).$$
Como $A^1 = A$, é imediato ver que, se $A^1 X = 0$, então $AX = 0$, e, portanto, $X = 0$. Logo, $P(1)$ é verdadeira. Suponhamos, agora, que $k \in \{1, 2, \ldots\}$ seja tal que $P(k)$ seja verdadeira e vamos mostrar que, nesse caso, $P(k+1)$ é também verdadeira. Para tanto, notemos, inicialmente, que

$$A^{k+1} X = (A \cdot A^k) X = A \cdot (A^k X) = AY,$$

em que $Y := A^k X$. Em vista disso, dizer que $A^{k+1} X = 0$ é o mesmo que dizer que $AY = 0$. Mas, se $AY = 0$, então, por hipótese, $Y = 0$. E, se $Y = 0$, então, como $Y = A^k X$, $A^k X = 0$, e, por conseguinte, $X = 0$. Sendo assim, $A^{k+1} X = 0 \Rightarrow X = 0$, e, portanto, $P(k+1)$ é de fato verdadeira.

Em vista do que foi dito no parágrafo anterior, podemos concluir que $P(1)$ é verdadeira, e que, para cada $k \in \{1, 2, \ldots\}$, a validade de $P(k)$ implica a validade de $P(k+1)$. Decorre, pois, do princípio da indução finita que $P(k)$ é verdadeira qualquer que seja $k \in \{1, 2, \ldots\}$.