CCM - Matemática I - 2023

INDUÇÃO e VALOR ABSOLUTO

Aulas 9, 10

14, 18/09/23

INDUÇÃO MATEMÁTICA

Como provar afirmações como:

(i) $1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2 < \dfrac{n^3}{3} < 1^2+2^2+\cdots+n^2$,

(ii) $1^3+2^3+\cdots+n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2$?

Princípio da Indução Matemática

Suponha que $A(n)$ é uma afirmação que depende de um natural $n \in \mathbb{N}$, como uma das anteriores, e suponha que seja possível provar

Caso Base → (i) que $A(1)$ é verdadeira e

Passo de Indução → (ii) que sempre que $A(k)$ é verdadeira, $A(k+1)$ também o é.

Podemos então concluir que $A(k)$ é verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}$.

<u>Prova</u>: O que os itens (i) e (ii) acima garantem é que o conjunto dos naturais k para os quais vale $A(k)$ é um conjunto indutivo. Como $\mathbb{N}$ está contido em todo conjunto indutivo e é, ele próprio, indutivo, segue que $A(k)$ vale para todo $k \in \mathbb{N}$. $\blacksquare$

Vejamos como isso funciona no caso (i) acima, com algumas observações importantes.
Vamos então mostrar que, para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{1^2+2^2+\dots+(k-1)^2 < k^3/3 < 1^2+2^2+\dots+k^2.}$$

Casos base você pode (e DEVE) provar quantos quiser.

Para $k=1$, a maneira razoável de entender a expressão à esquerda é que não há termos na soma, que é, portanto, igual a zero: $0 < 1/3 < 1.$ ✓

Mas você poderia achar que estamos roubando, então façamos $k=2$. Nesse caso, temos $1 < 8/3 < 1+4.$ ✓

Façamos também — por que não — $k=3$: $1+4 < 9 < 1+4+9.$ ✓

Passo de indução

Esse é o momento em que generalizamos o padrão que começou a aparecer nas provas dos casos base acima. É fundamental lembrar que temos que usar a chamada HIPÓTESE DE INDUÇÃO. Nesse caso, a hipótese de indução é

H.I.: Suponha que provamos, para um certo $k=n$, que $1^2+\dots+(n-1)^2 < n^3/3 < 1^2+\dots+n^2.$

Temos que mostrar que a afirmação vale para $k = n+1$, isto é, que

$$1^2+2^2+\dots+n^2 < \frac{(n+1)^3}{3} < 1^2+2^2+\dots+(n+1)^2.$$

Para isso, expandimos a expressão

$$\frac{1}{3}(n+1)^3 = \frac{1}{3}\left(n^3+3n^2+3n+1\right) = \frac{n^3}{3} + n^2 + n + \frac{1}{3} \qquad (*)$$

Momento crucial: usamos a H.I.: A H.I. diz que isso satisfaz

$$1^2+\dots+(n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2+\dots+n^2 \qquad (\mathrm{I})$$

Por outro lado: $n^2+n+\frac{1}{3} < n^2+2n+1 = (n+1)^2$ (II) e $n^2+n+\frac{1}{3} > n^2$ (III).

Juntando (I), (II) e (III) em (*), obtemos

$$\underbrace{\left(1^2+\dots+(n-1)^2\right)}_{(\mathrm{I})} + \overset{(\mathrm{III})}{n^2} < \overbrace{\underbrace{\frac{n^3}{3}}_{(\mathrm{I})} + \left(n^2+n+\frac{1}{3}\right)}^{\frac{(n+1)^3}{3}\ \overset{(*)}{=}} < \underbrace{\left(1^2+\dots+n^2\right)}_{(\mathrm{I})} + \overset{(\mathrm{II})}{(n+1)^2}$$

Isso termina a prova (multicolorida). ■

Façamos agora a prova de (ii) $\left(1+2+\cdots+n = n(n+1)/2\right)$, sem tantas cores e setinhas.

Bem, não exatamente o (ii) que escrevi antes...

<u>Casos Base</u>

<u>$n=1$</u> : $1 = 1\cdot 2/2$

<u>$n=2$</u> : $1+2 = 2\cdot 3/2$

<u>Passo de Indução</u> : Supomos que provamos que $1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$ (H.I.) e queremos mostrar que $1+2+\cdots+n+1 = (n+1)(n+2)/2$.

Começando pela esquerda em ↑ :

$$1+2+\cdots+n+1 = (1+2+\cdots+n)+(n+1) \overset{\text{H.I.}}{=} n(n+1)/2 + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

$$= (n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right) = (n+1)(n+2)/2. \quad \blacksquare$$

Divirta-se agora você mesmo fazendo os

<u>Exercícios</u> : Seção I 4.4 (p. 35-37) : 1 (b), (c), (d), 2, 3, 4, 6, 7, 11, 12.

Exemplo super-importante: Seja a um número real, $a \geq 0$. Então vale a igualdade

$$\boxed{1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}} \quad (*)$$

Prova por indução:

Caso base $n = 0$: $\quad 1 = \dfrac{1 - a^{0+1}}{1 - a}$ ✓

$n = 1$: $\quad 1 + a = \dfrac{1 - a^2}{1 - a}$? Lembre-se que $1 - a^2 = (1+a)\cdot(1-a)$. Disso segue que

$$\frac{1 - a^2}{1 - a} = \frac{(1+a)\cdot\cancel{(1-a)}}{\cancel{1-a}} = 1 + a. \checkmark$$

Exercício: Faça o caso $n = 2$.

Passo de Indução: Supomos que provamos que $1 + a + \cdots + a^{n-1} = \dfrac{1 - a^n}{1 - a}$ e queremos provar que $1 + a + \cdots + a^{n-1} + a^n = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$.

Mas

$$1 + a + \cdots + a^n = (1 + \cdots + a^{n-1}) + a^n \underset{\text{H.I.}}{=} \frac{1 - a^n}{1 - a} + a^n = \frac{1 - \cancel{a^n} + \cancel{a^n} - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

$\blacksquare$

Esse exemplo é tão importante que vamos fazer uma segunda demonstração de (*).
Primeiro, introduzamos uma notação útil: se $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são números que queremos somar, podemos denotar a soma, como antes, por $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, mas é útil ter uma notação um pouco mais econômica:

$$\boxed{a_1 + a_2 + \dots + a_n =: \sum_{i=1}^{n} a_i}$$

a letra "i" aqui pode ser trocada por outra qualquer, que não seja n.

Assim, a igualdade (*) pode ser reescrita como

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}} \quad (*)$$

Outra prova: Denotemos

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a^i .$$

É claro que $S_{n+1} = S_n + a^{n+1}$. Mas note também que

$$S_{n+1} = 1 + a + \dots + a^{n+1} = 1 + a(1 + a + \dots + a^n) = 1 + a \cdot S_n .$$

Segue que

$$S_n + a^{n+1} = 1 + a \cdot S_n \implies (1-a) S_n = 1 - a^{n+1} \implies S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} . \quad ▨$$

VALOR ABSOLUTO

O valor absoluto de um número real x é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

A descrição informal é que "tiramos o sinal" de x, mas matemáticos são chatos e preferem dizer que $|x|$ é x ele próprio, se x é positivo, mas, se x é negativo, trocamos seu sinal (obtendo, claro um número positivo). Em particular, $|x| \geq 0$.

$$|5| = 5 \qquad |-2| = 2.$$

Teorema: Se $a \geq 0$, então $|x| \leq a$ se e somente se $-a \leq x \leq a$.

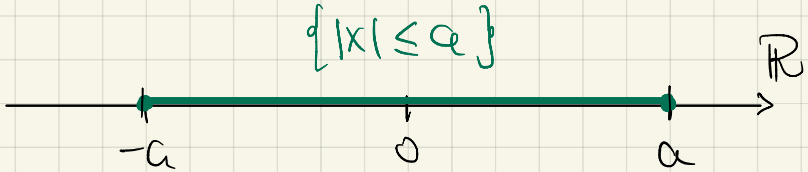
Prova: Temos que provar duas afirmações: 1 se $|x| \leq a$ então $-a \leq x \leq a$ e 2 se $-a \leq x \leq a$, então $|x| \leq a$.

Prova de 1: Se $|x| \leq a$ então (pela questão da provinha, já que $|x| \geq 0$), $-a \leq -|x|$.
Mas $x = |x|$ ou $x = -|x|$ e, portanto,

$$-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a.$$

Prova de 2: Suponha agora que $-a \leq x \leq a$. Disso segue que $-a \leq -x \leq a$.
Assim, se $|x| = x$, $|x| \leq a$ e se $|x| = -x$, também vale $|x| \leq a$. ▨

Na reta real, o conjunto $\{x : |x| \le a\}$ é representado pelo intervalo



O teorema seguinte é muito importante em vários contextos: chama-se a DESIGUALDADE TRIANGULAR.

Teorema: Para quaisquer números reais x, y,

$$\boxed{|x+y| \le |x| + |y|.}$$

Prova: Como $-|x| \le x \le |x|$ e $-|y| \le y \le |y|$, obtemos, somando, que

$$-|x| - |y| \le x+y \le |x| + |y|$$

Do teorema anterior, segue que $|x+y| \le |x|+|y|$. ■

Teorema: Se $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são números reais quaisquer, vale

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| .$$

Prova: Exercício usando indução. ■

O próximo teorema é uma versão de uma das mais importantes desigualdades em matemática, a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Teorema: Se $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ são números reais quaisquer,

$$\boxed{\left(\sum_i a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_i a_i^2\right) \cdot \left(\sum_i b_i^2\right).}$$

Desigualdade de Cauchy - Schwarz.

Prova: Como o quadrado de todo número real é ≥ 0, vale $\sum_i (a_i x + b_i)^2 \geq 0$, e isso vale para todo $x \in \mathbb{R}$. Calculando os quadrados e somando, obtemos

$$A x^2 + 2 C x + B \geq 0,$$

onde $A = \sum_i a_i^2$, $B = \sum_i b_i^2$ e $C = \sum_i a_i b_i$.

Mas um polinômio quadrático (na variável x) que é sempre maior ou igual a 0 tem que satisfazer (do ensino médio)

$$4C^2 - 4AB \leq 0 \iff C^2 \leq AB.$$

Lembrando o que são A, B e C, provamos o enunciado. ■

Exercício: Se $\left(\sum a_i b_i\right)^2 = \left(\sum a_i^2\right) \cdot \left(\sum b_i^2\right)$, o que isso quer dizer sobre a_i e b_i?