Matemática I - CCM - 2023

Os Números Reais III

Aulas 7,8,9

11,12,14/09/23

OS NÚMEROS REAIS 3

Agora vamos mudar de atitude um pouco e vamos passar a ASSUMIR a existência de um corpo ordenado completo, denotado por $\mathbb{R}$, e chamado de corpo de números reais. Um corpo ordenado completo é um conjunto $\mathbb{R}$, com duas operações $+$ e $\cdot$ que satisfazem os

- Axiomas de Corpo (1 a 6): comutatividade, associatividade, distributividade, existência de elementos neutros, existência de inversos.
- Axiomas de Ordem (7 a 9): existe um subconjunto $\mathbb{R}_+$ que é fechado por $+$ e $\cdot$ tal que $0 \notin \mathbb{R}_+$ e se $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$, então $x \in \mathbb{R}$ ou $-x \in \mathbb{R}$, mas não ambos.
- Axioma de Completude (10): $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo, isto é, todo subconjunto de $\mathbb{R}$ que é limitado superiormente tem um supremo.

Seria possível provar a existência de $\mathbb{R}$ partindo de axiomas "mais básicos" do que os listados acima (os Axiomas de Peano, por exemplo), mas não faremos isso aqui.

Teorema: Todo número real $a \geq 0$ possui uma "raiz quadrada", isto é, existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^2 = a$.

Prova: Vimos que, em todo corpo ordenado, se o conjunto $S_a = \{x : x^2 < a\}$ tem supremo, então o supremo $b = \sup S_a$ satisfaz $b^2 = a$. Assim, para provar o teorema, basta mostrarmos que S_a é limitado superiormente, já que, pelo Axioma de Completude, segue que S_a tem supremo.

Como vimos, $(1+a)^2 = 1 + 2a + a^2 > a$. Assim, se $x \geq 1+a$, segue que, como $1+a > 0$, $x^2 \geq (1+a)^2 > a$ e, portanto, $x \notin S_a$. Isto é, $1+a$ é cota superior para S_a. ∎

Teorema: Seja $S \subset \mathbb{R}$ um subconjunto limitado superiormente e seja ε (épsilon) um número positivo qualquer. Então existe $s \in S$ tal que $s > \sup S - \varepsilon$.

Prova: Óbvio, praticamente: se não houvesse um tal s, então $\sup S - \varepsilon$ seria cota superior para S, o que contradiz a definição de supremo, pois $\sup S - \varepsilon < \sup S$. ∎

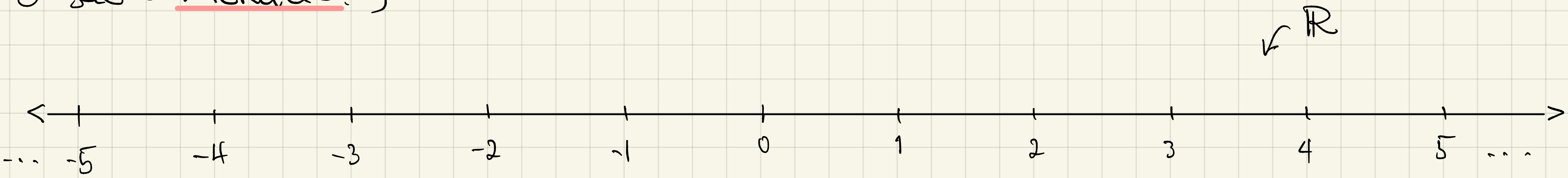
Teorema: O conjunto dos números naturais $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ é ilimitado superiormente.

Prova: Suponha o contrário, isto é, suponha que $\mathbb{N}$ seja limitado superiormente. Pelo Axioma de Completude, existe então $b = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Pelo teorema anterior, existe $n \in \mathbb{N}$

tal que $n > b-1$. Mas isso quer dizer que $n+1 > b$ e, como $\mathbb{N}$ é um conjunto indutivo e $n \in \mathbb{N}$, $n+1$ também está em $\mathbb{N}$, o que contradiz $b = \sup \mathbb{N}$. Isso mostra, portanto, que $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente. ■

De volta à RETA

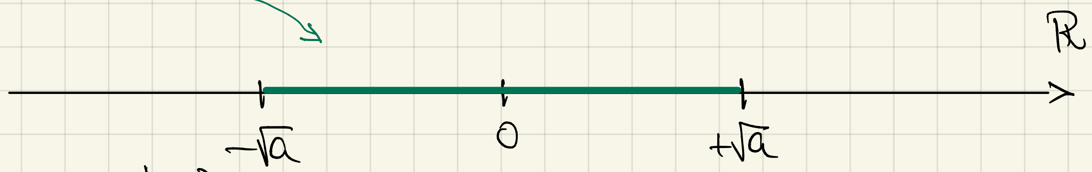
Vimos anteriormente que é razoável representar corpos ordenados por retas ou por segmentos de reta. Naquele momento não era claro se fazia sentido usar um segmento de reta finito. Agora fica claro que uma reta infinita é uma representação gráfica mais adequada dos reais $\mathbb{R}$, já que $\mathbb{R}$ é ILIMITADO, tanto para "à direita" (ilimitado superiormente, já que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ é ilimitado superiormente) quanto para "à esquerda" (ilimitado inferiormente, já que os inteiros negativos o são: EXERCÍCIO.)



Uma forma de interpretar o axioma de completude nessa representação é dizer que todo segmento dessa reta possui pontos extremos e esses pontos são números reais.

Por exemplo,

$$S_a = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < a\} = \{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}\}$$
$$= [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$$



Aqui estamos usando a notação

$$\sup S_a = \sqrt{a}$$

isto é, o símbolo $\sqrt{a}$ denota o número real (positivo) $\sup S_a$, que provamos existir acima.

Assim, embora também faça sentido representar o corpo ordenado dos racionais $\mathbb{Q}$ como uma reta, essa reta seria muito "porosa", cheia de "pontos faltando" em lugares como $\sup\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ (que, como vimos, não existe em $\mathbb{Q}$).

Propriedade Arquimediana dos Números Reais

Teorema: Dados $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.

Prova: Se $y \leq 0$, tome $n = 1$. Se $y > 0$, considere o número $y/x \in \mathbb{R}_+$. Como $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente, existe $n \in \mathbb{N}$, $n > y/x$. Isto é equivalente ao enunciado: $nx > y$. ∎

Uma forma de interpretar esse teorema é dizer que é possível medir a distância da terra ao sol usando uma régua de 30 cm.

Exercício: Quantas réguas de 30 cm são necessárias para fazer um ponte para formigas viajarem da terra ao sol? Dado: A distância aproximada da terra ao sol é 151 milhões de quilômetros.

Teorema: Suponha que três números reais a, x, y satisfazem as seguintes desigualdades para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$a \leq x \leq a + \frac{y}{n}.$$

Então $x = a$.

Prova: Se $x > a$, o teorema anterior implica que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n(x-a) > y$. Mas isso é equivalente a dizer que $x > a + y/n$, que contradiz a segunda desigualdade do enunciado. (Onde usamos a primeira?) $\blacksquare$

Esse teorema pode parecer meio bobinho, mas ele será várias vezes útil a seguir.

Teorema: Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ e $C = \{a+b : a \in A, b \in B\}$. Se A e B têm supremos então C também tem e $\sup C = \sup A + \sup B$.

Prova: Suponha que $\bar{a} = \sup A$ e $\bar{b} = \sup B$. Isso quer dizer, em particular que $a \leq \bar{a}$ para todo $a \in A$ e $b \leq \bar{b}$ para todo $b \in B$. Portanto $a+b \leq \bar{a}+\bar{b}$ para todo $a \in A$ e $b \in B$. Isso mostra que $\bar{a}+\bar{b}$ é cota superior para C. Pelo Axioma de Completude, C tem supremo $\bar{c}$ e, como $\bar{a}+\bar{b}$ é cota superior para C, $\bar{c} \leq \bar{a}+\bar{b}$.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Por um teorema anterior, sabemos que, como $\bar{a} = \sup A$, $\bar{b} = \sup B$, existem elementos $a \in A$ e $b \in B$, tais que

$$a > \bar{a} - \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad b > \bar{b} - \frac{1}{n}.$$

Segue que

$$a+b > \bar{a}+\bar{b} - \frac{2}{n} \implies \bar{a}+\bar{b} < a+b + 2/n$$

e, como $a+b \in C$, segue que $\bar{c} = \sup C$, satisfaz $\bar{a}+\bar{b} < \bar{c} + 2/n$. Portanto, juntando tudo, obtemos

$$\bar{c} \leq \bar{a}+\bar{b} < \bar{c} + 2/n.$$

Como isso vale para todo $n \in \mathbb{N}$, o teorema bobinho implica que $\bar{c} = \bar{a}+\bar{b}$. $\blacksquare$

Exercício: Enuncie e prove um teorema análogo para ínfimos. Sério, isto é, os exercícios que escrevo aqui são importantes para você entender e fixar os conceitos. Fazê-los é muito importante.

Exercícios: Seção I 3.12 (p. 28): 1 a 6, 10, 11.