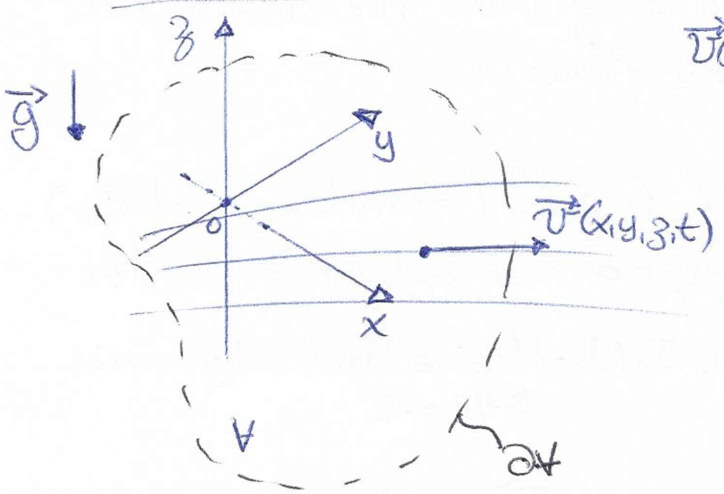
PNV 5204

NOTAS DE AULA

AULA # 01



⇨ Velocidade:

$$\vec{v}(x,y,z,t) = v_x(x,y,z,t)\,\vec{i} + v_y(x,y,z,t)\,\vec{j} + v_z(x,y,z,t)\,\vec{k}$$

⇨ pressão: $p(x,y,z,t)$

Eq. de Euler: $$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\nabla p + \rho\vec{g}$$

Mostra-se que (verificar):

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla(\vec{v}\cdot\vec{v}) + (\nabla\times\vec{v})\times\vec{v}$$

Então: $$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(\vec{v}\cdot\vec{v}) + (\nabla\times\vec{v})\times\vec{v}\right) = -\nabla p + \rho\vec{g}$$

e, se $\nabla\times\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \nabla\phi$

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi + \frac{1}{2}\rho\nabla(\vec{v}\cdot\vec{v}) + \nabla p - \rho\vec{g} = 0$$

porém: se $\vec{g} = -g\vec{k} \Rightarrow -\rho\vec{g} = \rho g\vec{k} = \nabla(\rho g z)$

$$\therefore\ \nabla\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho(\vec{v}\cdot\vec{v}) + p + \rho g z\right) = 0$$

o que implica em:

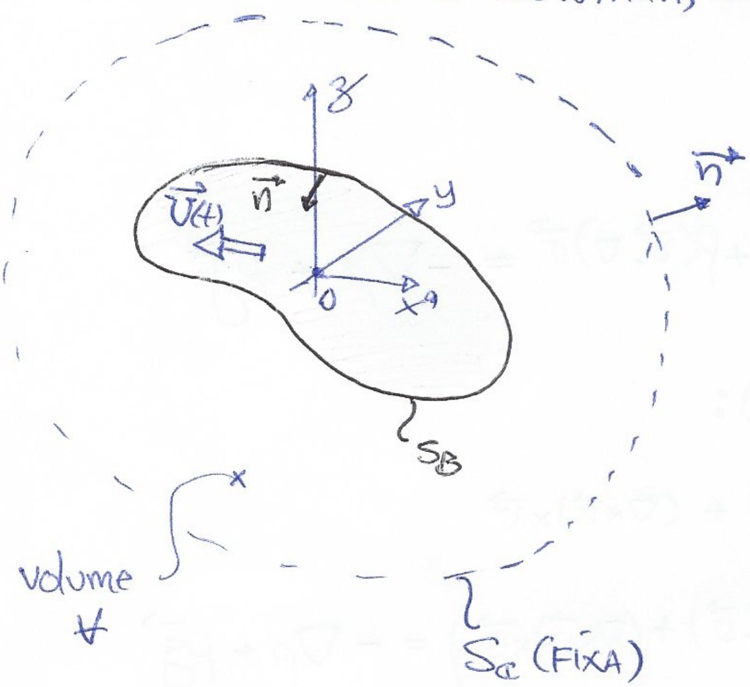
$$\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho\nabla\phi\cdot\nabla\phi + p + \rho g z = C(t)$$

Eq. Bernoulli

• O conceito de massa adicional

Consideremos um corpo rígido que se move em translação arbitrária em um fluido inicialmente em repouso, s/ outras fronteiras físicas:

Obs: P/ o caso geral c/ 6 gdl (translação e rotação) considerando forças e momentos resultantes
Ver: Newman, J. N. - Marine Hydrodynamics §4.12, 4.13



$\vec{U}(t) = \{U_1(t), U_2(t), U_3(t)\}$

potencial de velocidades:

$\phi(x, y, z, t)$

campo de velocidades:

$\vec{v}(x,y,z,t) = \nabla\phi(x,y,z,t)$

Considerando a conservação de qtde de movimento do fluido compreendido neste volume de controle, temos:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\forall} \rho\vec{v}\, d\forall + \iint_{S_C} (\rho\vec{v})\, \vec{v}\cdot\vec{n}\, dS = -(\vec{F} + \vec{F_C})$$

fluxo de qtde de mov. por S_C

força resultante sobre o corpo (S_B)

então (ρ = cte):

$$\rho\frac{d}{dt}\iiint_{\forall} \nabla\phi\, d\forall + \rho\iint_{S_C} \nabla\phi\,(\nabla\phi\cdot\vec{n})\, dS = -(\vec{F} + \vec{F_C})$$

mas (verifique através do Teorema da Divergência):

$$\iiint_{\forall} \nabla\phi \, d\forall = \iint_{S_B} \phi \vec{n} \, dS + \iint_{S_C} \phi \vec{n} \, dS$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \iiint_{\forall} \nabla\phi \, d\forall = \frac{d}{dt} \iint_{S_B} \phi \vec{n} \, dS + \iint_{S_C} \frac{\partial \phi}{\partial t} \vec{n} \, dS$$

S_C é FIXA

Assim:

$$\vec{F} + \vec{F_C} = -\rho \frac{d}{dt} \iint_{S_B} \phi \vec{n} \, dS - \iint_{S_C} \left[\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \vec{n} + \rho \nabla\phi (\nabla\phi \cdot \vec{n}) \right] dS$$

mas $\vec{F_C}$ tbm pode ser obtida integrando-se a pressão em S_C:

$$\vec{F_C} = \iint_{S_C} p(x,y,z,t) \, \vec{n}(x,y,z) \, dS$$

ignorando efeitos hidrostáticos (gravitacionais)

e, da Eq. de Bernoulli: $p(x,y,z,t) = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho \nabla\phi \cdot \nabla\phi$

$$\therefore \vec{F} - \iint_{S_C} \left[\cancel{\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}} + \frac{1}{2} \rho \nabla\phi \cdot \nabla\phi \right] dS = -\rho \frac{d}{dt} \iint_{S_B} \phi \vec{n} \, dS - \iint_{S_C} \left[\cancel{\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}} + \rho \nabla\phi (\nabla\phi \cdot \vec{n}) \right] dS$$

$$\vec{F} = -\rho \frac{d}{dt} \iint_{S_B} \phi \vec{n} \, dS - \rho \iint_{S_C} \left[\nabla\phi (\nabla\phi \cdot \vec{n}) - \frac{1}{2} \rho \nabla\phi \cdot \nabla\phi \right] dS$$

Mas, na ausência de outra fronteira física, podemos considerar S_C uma superfície esférica de raio r_C e tomar $r_C \to \infty$.

Nesse caso, como $\nabla\phi \big|_{\substack{S_C \\ r_C \to \infty}} \to \vec{0}$ (ver Newman):

$$\iint_{S_\infty} \left[\nabla\phi(\nabla\phi\cdot\vec{n}) - \tfrac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi \right] dS \to 0$$

resultando:

$$\boxed{\vec{F}(t) = -\rho \frac{d}{dt} \iint_{S_B} \phi\, \vec{n}\, dS}$$

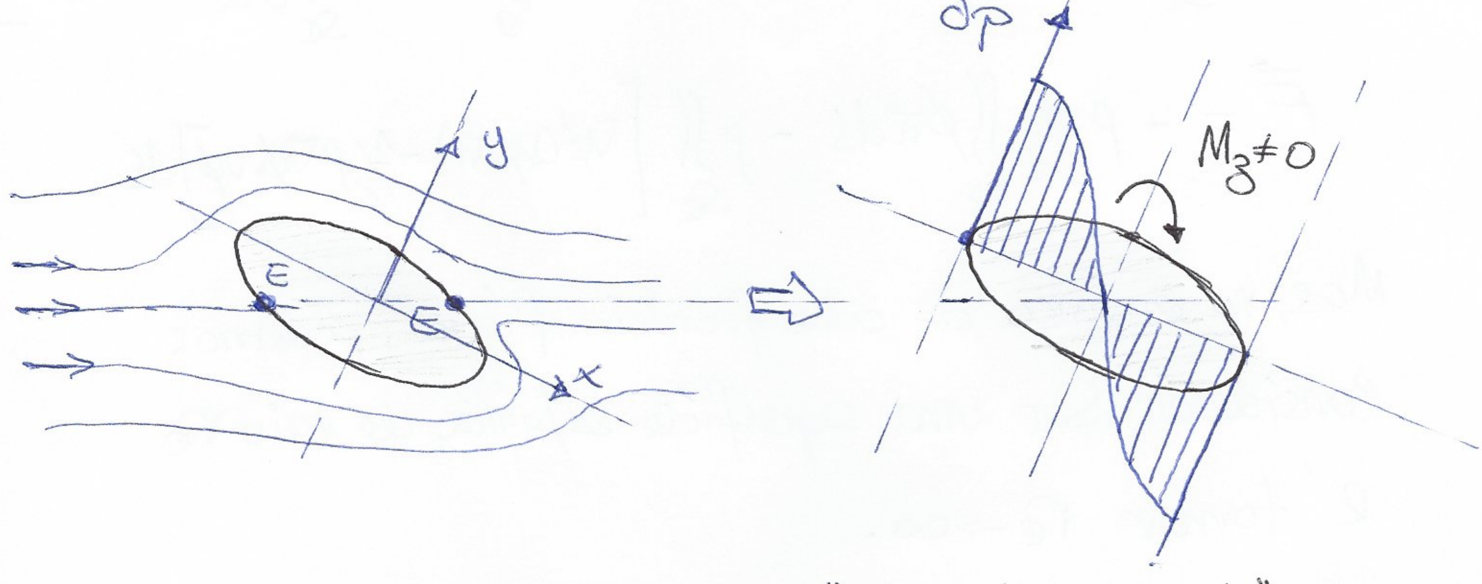
Algumas observações importantes:

(1) Se o corpo está em movimento de translação uniforme ($\vec{U} = \vec{cte}$), então:

$\phi = \phi(x, y, z)$, esc. permanente (invariante no tempo)

e, portanto: $\boxed{\vec{F} = \vec{0}}$ (Paradoxo do D'Alembert)

(2) Em translação uniforme, embora $\vec{F}$ seja necessariamente nula, o momento pode não ser:



"Momento de Munk"

Sendo: $\vec{U}(t) = \{U_1(t), U_2(t), U_3(t)\}$, o potencial

de velocidades pode ser escrito na forma:

$$\phi(x,y,z,t) = U_1(t)\,\varphi_1(x,y,z) + U_2(t)\,\varphi_2(x,y,z) + U_3(t)\,\varphi_3(x,y,z)$$

ou: $$\phi(x,y,z,t) = \sum_{i=1}^{3} U_i(t)\,\varphi_i(x,y,z)$$

Onde: $\varphi_i(x,y,z)$: potencial de velocidades do escoamento gerado pelo movimento do corpo com velocidade unitária na direção $\vec{e}_i$ $(U_i = 1)$

Então: $$\vec{F} = -\rho \frac{d}{dt} \iint_{S_B} \phi\,\vec{n}\,dS = -\rho \frac{d}{dt} \iint_{S_B} \left(\sum_{i=1}^{3} U_i(t)\,\varphi_i(x,y,z)\,\vec{n}\,dS \right)$$

e, como $\vec{n} = \vec{n}(x,y,z)$, cte (na ausência de rotação):

$$\vec{F}(t) = -\rho \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{d}{dt}(U_i(t)) \iint_{S_B} \varphi_i\,\vec{n}\,dS \right]$$

$$\vec{F}(t) = -\left(\sum_{i=1}^{3} \left(\rho \iint_{S_B} \varphi_i\,\vec{n}\,dS \right) \dot{U}_i(t) \right)$$

Sendo: $\vec{F}(t) = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k} = \sum_{j=1}^{3} F_j\,\vec{e}_j$

então:

$$F_j(t) = -\sum_{i=1}^{3} \underbrace{\left(\rho \iint_{S_B} \varphi_i\,n_j\,dS \right)}_{\text{termo com dimensão de massa [kg]}} \dot{U}_i(t)$$

Definimos:

$$\boxed{m_{ij} = \rho \iint_{S_B} \varphi_i(x,y,z)\, n_j(x,y,z)\, dS} \qquad \begin{matrix} i=1,\dots,3 \\ j=1,\dots,3 \end{matrix}$$

massas adicionais do corpo rígido

- Observações:

(1) Os termos m_{ij} são propriedade exclusiva da geometria do corpo;

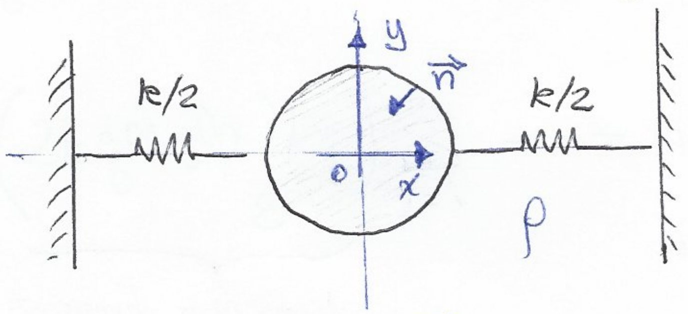
(2) No caso geral (6 gdl), há 36 coeficientes, $(i=1,\dots,6\,;\ j=1,\dots,6)$, levando a uma matriz de massa adicional:

$$[M]_{6\times6} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & \vdots \\ m_{21} & m_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & m_{66} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \end{bmatrix}$$

(3) Mostra-se que: $m_{ij} = m_{ji}$

- O conceito de "massa virtual":

Exemplo: Círculo (2D) de massa m imerso em um fluido de densidade ρ.
Oscilação em um único gdl (x)



$$\vec{n}(x,y) = n_1(x,y)\,\vec{i} + n_2(x,y)\,\vec{j}$$

• Equação do movimento do corpo:

$$m\ddot{x}(t) + kx = F_1(t)$$ ← força hidrodinâmica

No caso: $\vec{U}(t) = U_1(t)\vec{i} = \dot{x}(t)\vec{i}$

Então: $$F_1(t) = \underbrace{-\rho\iint_{S_B} \varphi_1 n_1\, ds}_{m_{11}}\, \dot{U}_1(t) \underbrace{- \rho\iint_{S_B} \varphi_2 n_1\, ds}_{m_{21}}\, \cancel{\dot{U}_2(t)}^{\,0}$$

$$\therefore\ F_1(t) = -m_{11}\dot{U}_1(t) = -m_{11}\ddot{x}(t)$$

Então:

$$m\ddot{x}(t) + kx = -m_{11}\ddot{x}(t)$$

$$\therefore\ \underbrace{(m + m_{11})}_{\text{massa "virtual" do corpo}}\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$$

⇒ A frequência natural de oscilação em x será, então:

$$\omega_{n,x} = \sqrt{\frac{k}{m + m_{11}}}$$

— // —