Dinâmica aplicada a tópicos de Enga Oceânica I
PNV5204

Aula 05

Teoria linear de ondas

Estruturas: forças de ondas e movimentos de 1ª ordem

Aproximação em ondas longas: A fórmula de Morison

Introdução

- Objetivos:
  - Apresentar alguns resultados fundamentais da chamada teoria linear de ondas: compreensão das características essenciais do escoamento (velocidade e pressão);
  - Definir as chamadas forças de 1a ordem e as funções de transferência lineares de movimento (RAOs)
  - Introduzir aproximação frequentemente empregada para estruturas esbeltas: formula de Morison

A Teoria Linear de Ondas

- Referências sugeridas para estudo:

1. DEAN R.G. & DALRIMPLE, R.A. Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists. Word Scientific, 1991.
2. FALTINSEN, O.M. Sea Loads on ships and offshore structures. Cambridge University Press, 1990.
3. JOURNÉE, J.M.J & MASSIE, W.W. Offshore Hydromechanics, Apostila, Delft University of Tech., Holanda, 1a Ed., 2001
4. NEWMAN, J.N. Marine Hydrodynamics. The M.I.T. Press, Cambridge MA/USA, 1977.
5. STOKER, J.J. Water Waves. New York: Interscience, 1957

A Teoria Linear de Ondas

- Fenômenos ondulatórios no ambiente marinho

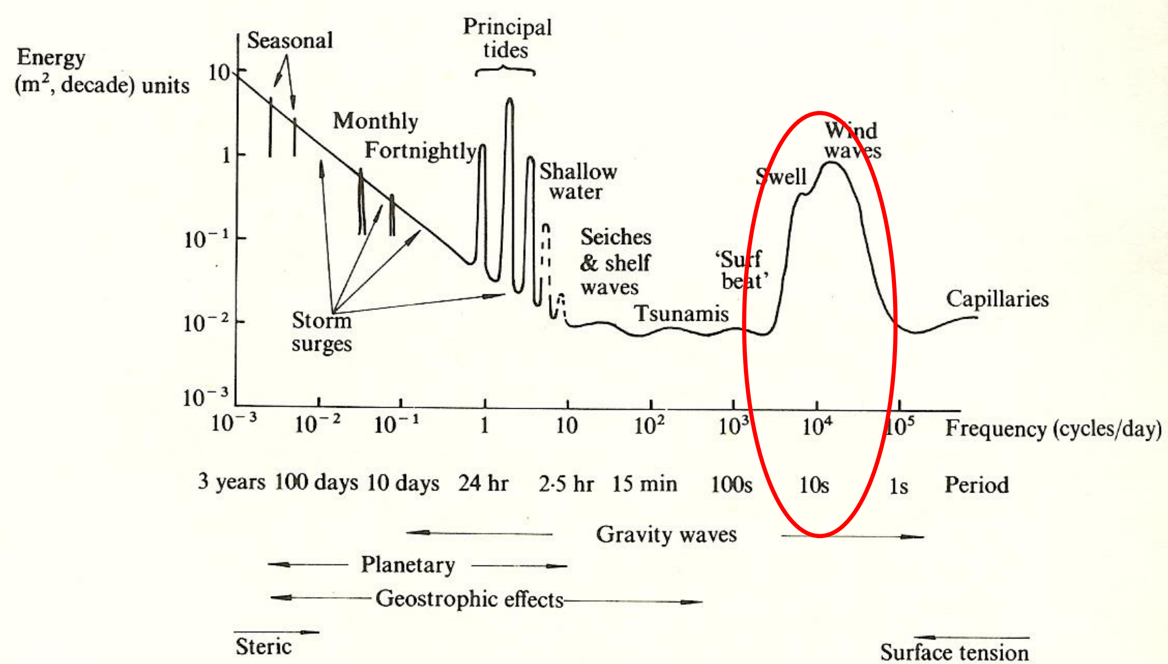
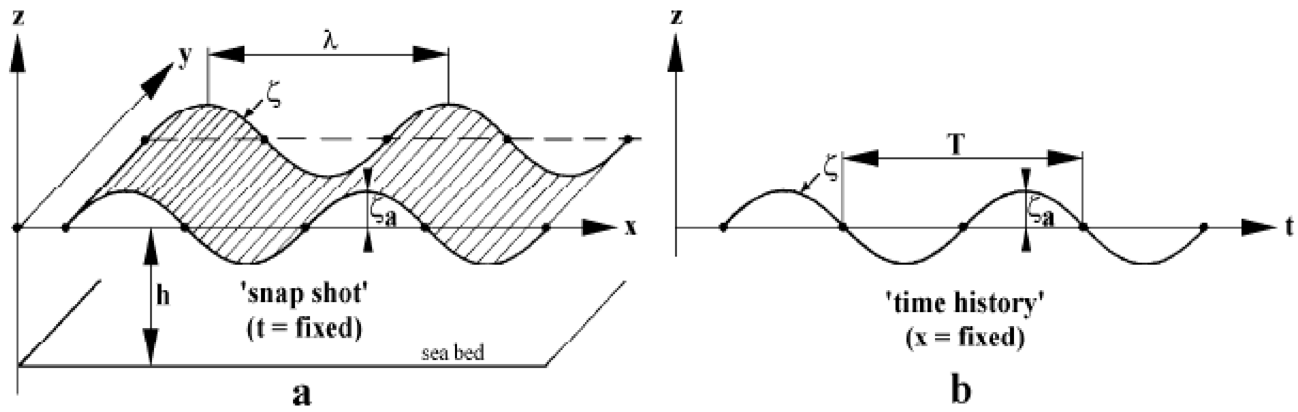


Figure 38. Sketch illustrating the way in which the mean square spectral density of wave elevation is distributed.

Price & Bishop, 1974

A Teoria Linear de Ondas

- Onda de gravidade: onda *regular* plana e progressiva



Journée & Massie, 2001

- Parâmetros característicos (conhecidos):
  - Amplitude (A)
  - Comprimento de onda (λ)
  - Período de oscilação (T)

A Teoria Linear de Ondas

- **Premissa:** Efeitos de viscosidade são pouco importantes na dinâmica do escoamento.

- **Modelo**: Escoamento potencial

$$\boxed{\vec{v}(x,z,t) = \nabla\phi(x,z,t)} \iff \nabla\times\vec{v} = \vec{0}$$

- **Incógnitas:**

$$\boxed{\begin{matrix}\phi(x,z,t) \\ p(x,z,t)\end{matrix}}$$

2 Equações

A Teoria Linear de Ondas

- Equação da continuidade

$$\nabla^2\phi = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right) = 0$$

Eq. de Laplace
PDE Linear 2ª Ordem

$$\Big\downarrow \boldsymbol{\phi}$$

- Equação de Movimento

$$\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi + p + \rho g z = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{p}$$

Eq. de Bernoulli

A Teoria Linear de Ondas

- A solução do escoamento decorre da solução de um problema matemático de valor de contorno baseado na eq. de Laplace (linear)...

$$\nabla^2\phi = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right) = 0$$

- mas com uma condição **não-linear** na superfície livre ($z=\zeta(x,t)$). Ex, a condição dinâmica que impõe pressão constante (atmosférica) na superfície:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\|\nabla\phi\|^2 + g\zeta = -\frac{p-p_0}{\rho} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \zeta = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi\right)_{z=\zeta(x,t)}$$

A Teoria Linear de Ondas

- Resultando em um PVC não linear:

$$\nabla^2 \phi = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = 0$$

- com as condições de contorno:

$$\nabla \phi(x, z, t) \cdot \vec{n} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \qquad z = -h$$

$$\zeta = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \qquad z = \zeta(x, t)$$

Para a dedução, ver, p.ex. Dean & Dalrimple, 1991

A Teoria Linear de Ondas

- No entanto, as ondas de gravidade têm uma característica importante:

- A declividade de onda (A/λ ou kA) está relacionada com sua estabilidade, e a maior parte das ondas de interesse se caracteriza por sua *baixa declividade*

- Limite para a *quebra* da onda:

$^{A}/_{\lambda}$ =0.07
ou
kA=0.44

- e, admitindo **kA <<1**, é possível linearizar a solução (ver notas de aula)

A Teoria Linear de Ondas

- O problema de valor de contorno **linearizado** *(onda de pequena amplitude, teoria de Airy)*:

$$\nabla^2\phi = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right) = 0$$

$$\nabla\phi(x,z,t)\cdot\vec{n} = \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \qquad z = -h$$

$$\zeta(x,t) = -\frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{z = 0}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

A solução deste PVC linear com base no *método da separação de variáveis* pode ser encontrada, p.ex., em Dean & Dalrimple, 1991

A Teoria Linear de Ondas

- A solução do escoamento:

$$\phi(x,z,t) = \frac{gA}{\omega}\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} sen(kx-\omega t)$$

Se em águas profundas (kh>π):
~ exp(kz)

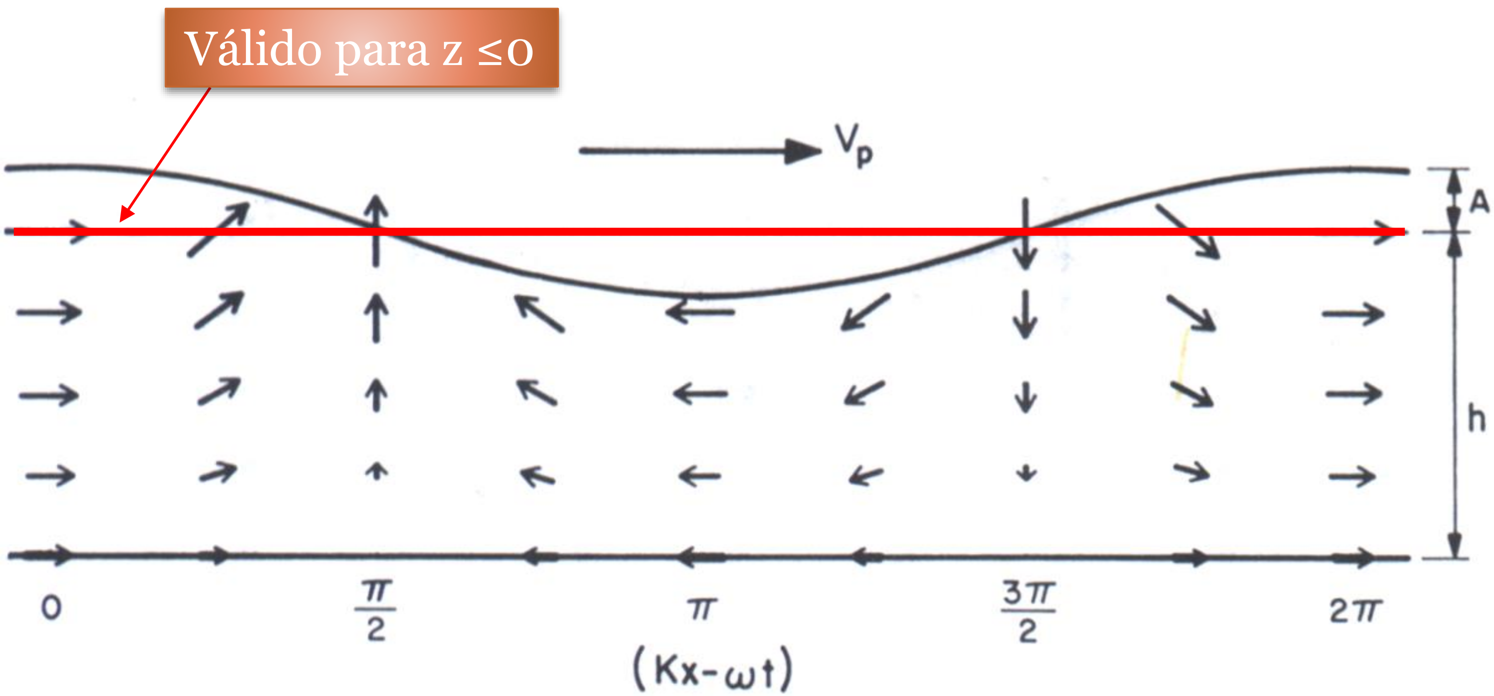
$$\zeta(x,t) = A\cos(kx-\omega t)$$

- e obedecendo à chamada *relação de dispersão* linear:

$$\boxed{k = \frac{\omega^2}{g\tanh kh}}$$

A Teoria Linear de Ondas

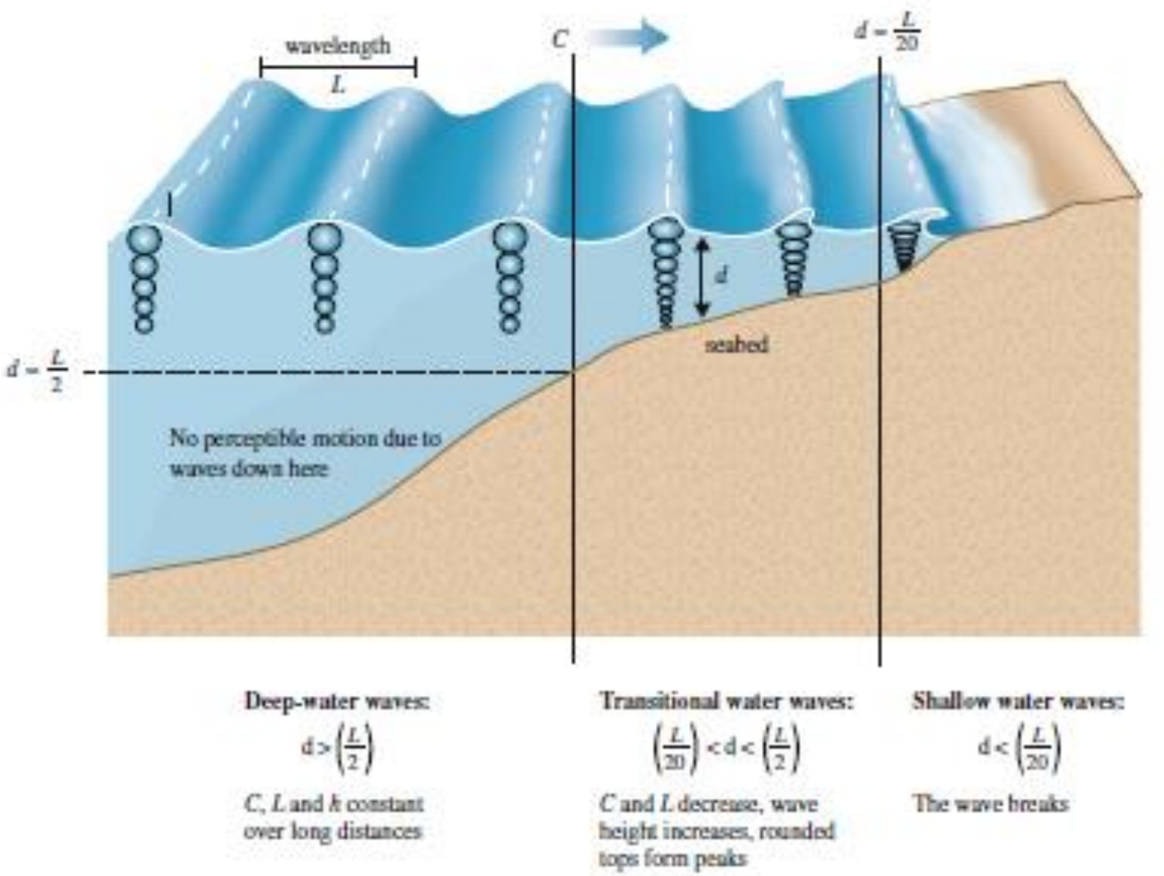
- A partir da qual obtemos o **campo de velocidades**



Newman, J.N., Marine Hydrodynamics (1977)

A Teoria Linear de Ondas

- As trajetórias (elípticas) do fluido:



Source: *Pecher, A. & Kofoed, J.P. (editors), Handbook of Ocean Wave Energy*

A Teoria Linear de Ondas

- e o **campo de pressão oscilatório** no escoamento:

$$\boxed{p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}}$$

Lembrando que o termo v² na eq. de Bernoulli é ignorado

$$p(x,z,t) = \rho g A \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(kx - \omega t)$$

$$h/\lambda \leq 1/2$$

- ou:

$$p(x,z,t) = \rho g A e^{kz} \cos(kx - \omega t)$$

$$h/\lambda > 1/2$$

A Teoria Linear de Ondas

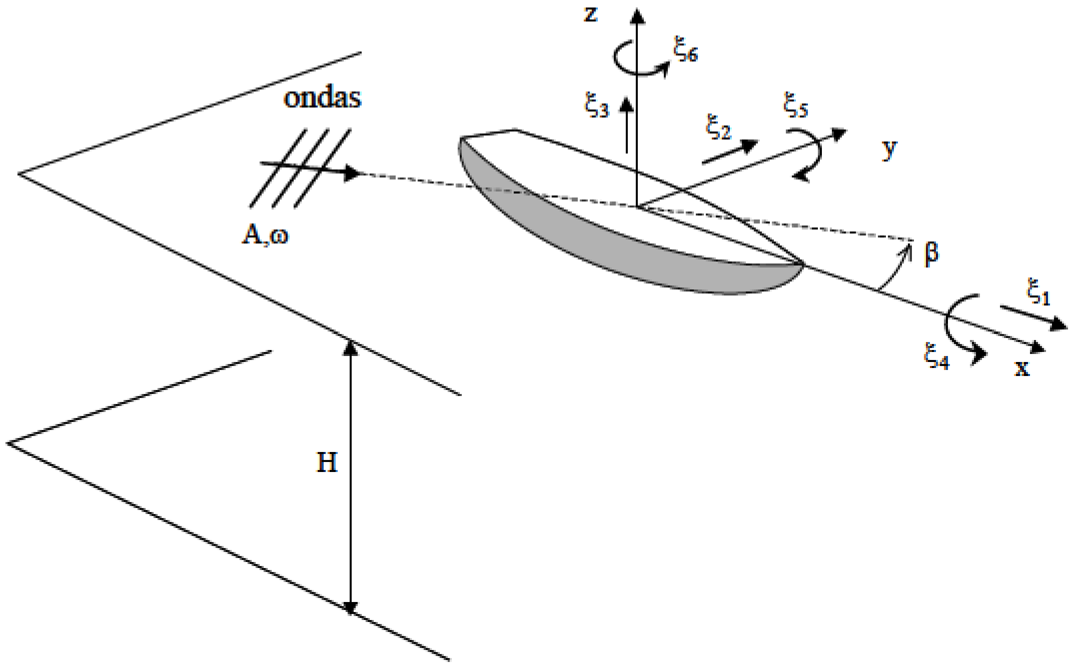
- *Observação*: Na solução linear do problema, ao campo de pressão oscilatório é somada a parcela hidrostática de pressão...

$$\boxed{p(x,z,t) = -\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} - \rho \mathrm{g} \mathrm{z}}$$

- mas deve-se lembrar que, para garantir a coerência do modelo, esse campo de pressão linear também só deve ser considerado para **z≤0**

A Interação Ondas-Estruturas Flutuantes

- O problema de comportamento em ondas de uma estrutura (*seakeeping*) consiste em se estimar os movimentos do corpo sob ação das forças hidrodinâmicas induzidas pelas ondas:



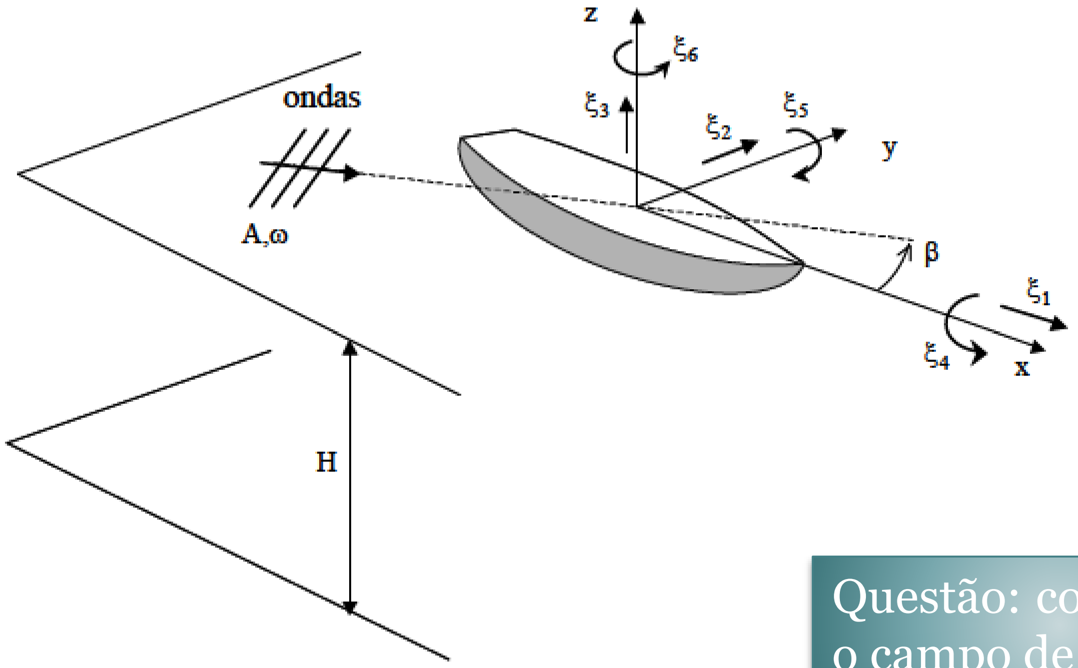
$$\vec{X}(t) = \{X_j(t)\};\ j = 1:6$$

$$\vec{V}(t) = \{\dot{X}_j(t)\};\ j = 1:3$$

$$\vec{\Omega}(t) = \{\dot{X}_j(t)\};\ j = 4:6$$

A Interação Ondas-Estruturas Flutuantes

- As forças hidrodinâmicas são obtidas pela integração do campo de pressão:



$$\vec{F} = \iint_S p\vec{n}dS$$

$$\vec{M} = \iint_S p(\vec{r} \times \vec{n})dS$$

Questão: como tratar o campo de pressão?

A Interação Ondas-Estruturas Flutuantes

- Condição para emprego do modelo de escoamento potencial ($p \sim p_{pot}$):
- Se l for uma dimensão característica do corpo:

$$O\left(\frac{F_{INERCIA}}{F_{VISC}}\right) = \frac{\rho l^3 \dot{u}}{\rho l^2 u^2} = \frac{l\omega}{u} \rightarrow KC^{-1}$$

- u será a amplitude de velocidade (do escoamento da onda incidente ou do produzido pelo movimento do corpo).

- Para KC<<1, devemos ter:

$$\boxed{\frac{A}{l} << 1} + \boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{|X_j|_{MAX}}{l} << 1 & j = 1:3 \\ |X_j|_{MAX} << 1 & j = 4:6 \end{array}}$$

A Interação Ondas-Estruturas Flutuantes

- A condição de pequena amplitude de onda também favorece o emprego da teoria linear de ondas (kA<<1)

- A condição de pequenos movimentos do corpo rígido permite a linearização da equação de movimento do corpo...

$$[M]\{\ddot{X}(t)\} = \{F(t)\}$$

$$\sum_{j=1}^{6} M_{ij}\dot{U}_j(t) = F_i(t) \quad \text{p/i=1:6}$$

- onde as forças hidrodinâmicas serão calculadas a partir da integração do campo linear de pressão sobre a superfície molhada *média* da estrutura flutuante ($\overline{S_B}$)

A Interação Ondas-Estruturas Flutuantes

- Por outro lado, a força hidrodinâmica linear será composta por três parcelas de origens distintas (ver, p.ex., Newman(1977)):

$$\sum_{j=1}^{6} M_{ij}\dot{U}_j(t) = F_i(t) = F_{RAD,i}(t) + F_{EXC,i}(t) + F_{STA,i}(t) \quad \text{p/i=1:6}$$

Associada às velocidades e acelerações do corpo rígido

Associada ao *espalhamento* da onda incidente sobre a estrutura fixa (s/movimentos)

Associada ao campo de pressão *hidrostático* (restaurações hidrostáticas)

A Interação Ondas-Estruturas Flutuantes

- As *forças de radiação* são de natureza semelhante às forças inerciais em fluido infinito (ver aula #04), mas, em função da presença da superfície-livre, haverá também parcela que estará em fase com a velocidade do corpo rígido (*amortecimento potencial*):

$$\boxed{F_{RAD,i} = -\sum_{j=1}^{6} a_{ij}\dot{U}_j + b_{ij}U_j \qquad i = 1,2,\ldots,6}$$

$$a_{ij}(\omega) = \frac{1}{\omega^2}\mathrm{Re}(f_{ij}) = -\frac{\rho}{\omega^2}\mathrm{Re}\left(\iint_{\bar{S}_B}\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\varphi_j dS\right)$$

$$b_{ij}(\omega) = -\frac{1}{\omega}\mathrm{Im}(f_{ij}) = \frac{\rho}{\omega}\mathrm{Im}\left(\iint_{\bar{S}_B}\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\varphi_j dS\right)$$

- φ_i(x,y,z): potenciais que representam o escoamento induzido por movimento oscilatório do corpo com frequência ω e velocidade unitária no gdl i

A Interação Ondas-Estruturas Flutuantes

- As *forças de restauração hidrostática* também são forças reativas, proporcionais aos deslocamentos do corpo rígido:

$$F_{STA,i} = -\sum_{j=1}^{6} c_{ij} X_j(t) \quad \text{p/i=1,6}$$

- onde: c_{ij}: coeficientes que só dependem da geometria do casco e de seus parâmetros inerciais

- e, portanto, as equações de movimento do corpo podem ser rescritas na forma:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{6}(M_{ij}+a_{ij}(\omega))\dot{U}_j(t) + b_{ij}(\omega)U_j(t) + c_{ij}X_j(t) = F_{EXC,i}(t) \quad \text{p/i=1:6}}$$

$$([M] + [A])\{\ddot{X}(t)\} + [B]\{\dot{X}(t)\} + [C]\{X(t)\} = \{F_{EXC}(t)\}$$

A Interação Ondas-Estruturas Flutuantes

- Observação: **A abordagem dinâmica no domínio da frequência**

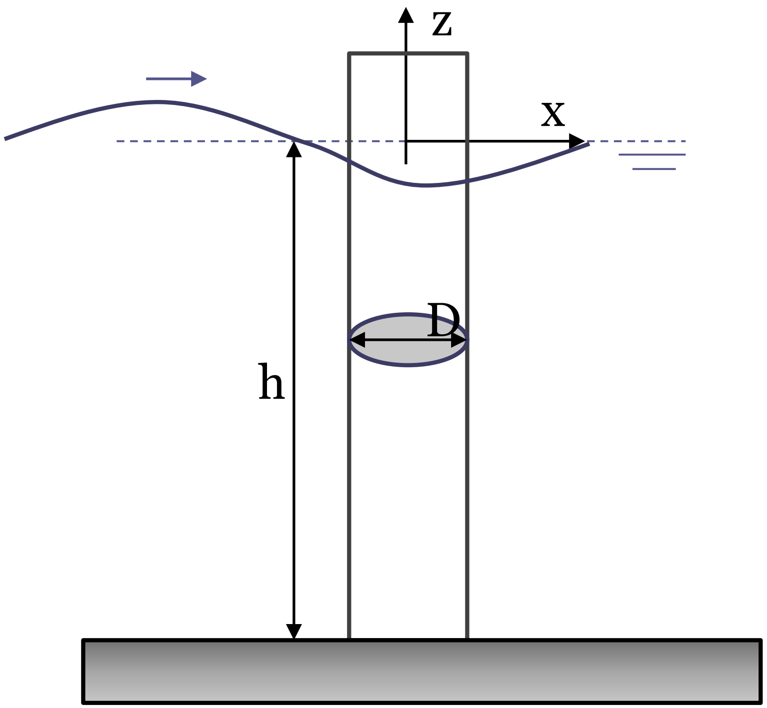
- Dada a linearidade do problema dinâmico, a solução em regime (*steady-state*) das equações de movimento pode ser feita também no chamado *domínio-da-frequência* (ver notas de aula)

- Através desta solução definem-se as chamadas funções de transferência lineares de movimento (ou **Response Amplitude Operators, RAOs**) :

$$\left\{\frac{\xi(\omega,\beta)}{A}\right\} = inv\{-\omega^2([M] + [A(\omega)]) + i\omega[B(\omega)] + [C]\}\,\{\chi(\omega,\beta)\}$$

Aproximação em ondas longas

- No final da década de 1940, pesquisadores da UCLA/Berkeley propuseram um método aproximado para se estimar a força de excitação horizontal em pilares de sustentação de *piers*, usando teoria de faixas:



In: Morison, J.R., O'Brien, M.P., Johnson, J.W., Schaaf, S.A., "The force exerted by surface waves on piles", Petrol. Trans., AIME, Vol.189, 1950.

$$F_{EXC}(t) = \int_{-h}^{\zeta(t)} f_{EXC,x}(t)dz$$

Aproximação em ondas longas

- E a expressão da força seccional inclui um termo inercial somado (de forma ad hoc) a um termo de arrasto viscoso:

$$\boxed{f_{EXC,x}(t) = \rho A_s C_M \dot{u}(0,0,-z,t) + \frac{1}{2}\rho D C_D u(0,0,-z,t)|u(0,0,-z,t)|}$$

- com as velocidades e acelerações obtidas da teoria linear de ondas (onda incidente não perturbada):

$$\boxed{u(x,z,t) = \omega A \frac{cosh\mathrm{k(z+h)}}{\sinh(kh)}\cos(kx-\omega t)}$$

$$\boxed{\dot{u}(x,z,t) = \omega^2 A \frac{cosh\mathrm{k(z+h)}}{\sinh(kh)}\sin(kx-\omega t)}$$

Aproximação em ondas longas

- A aproximação é válida no regime de ondas longas (kD<<1), quando o espalhamento de ondas pela estrutura é pequeno.

$$\boxed{kD = 2\pi \frac{D}{\lambda} \ll 1}$$

- E, lembrando da relação de dispersão:

$$\boxed{k = \frac{\omega^2}{g \tanh kh}}$$

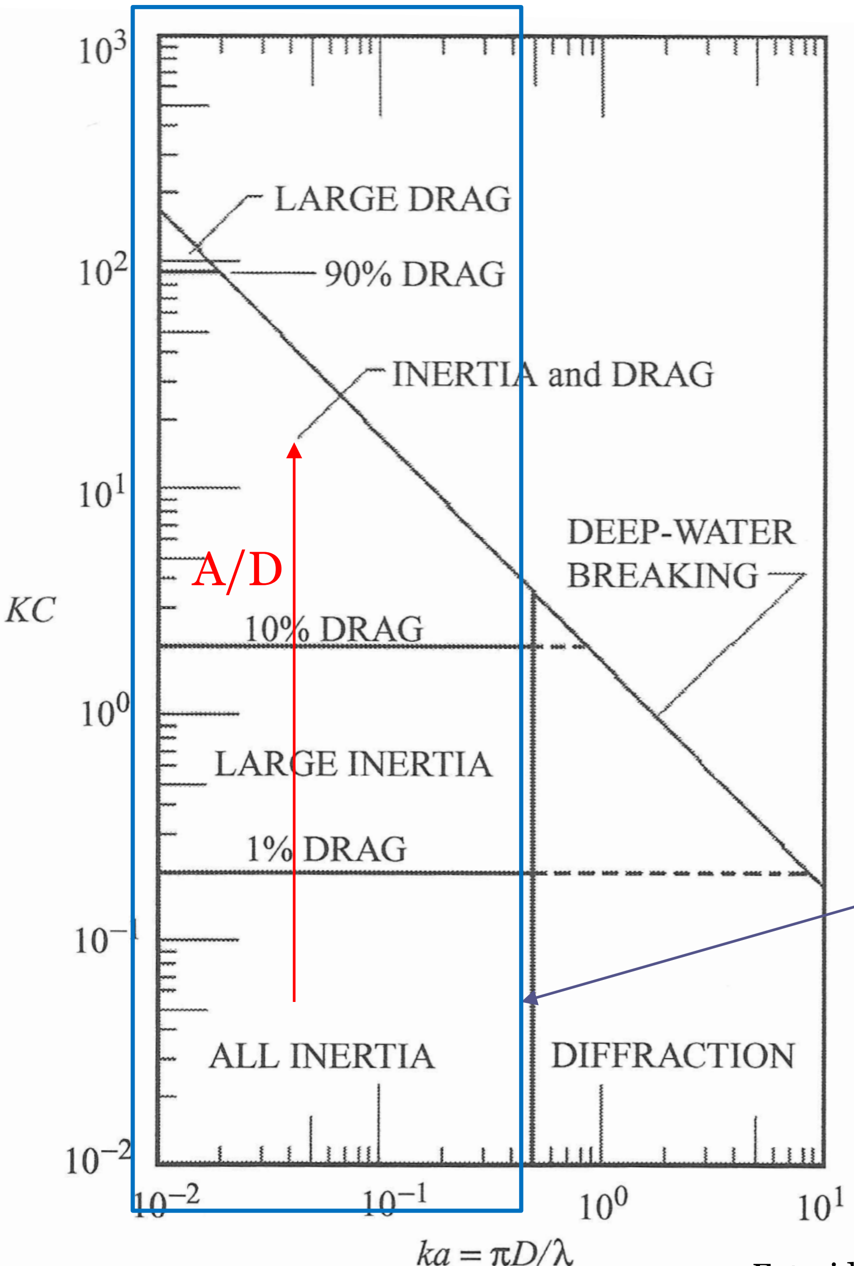
- Vemos que a condição de ondas longas estará associada, em geral, a ondas de baixa frequência

Aproximação em ondas longas

- Devemos lembrar, porém, que, para cada secção:

$$\boxed{KC = KC(z) = \frac{UT}{D} = 2\pi \frac{A}{D} e^{kz}}$$

- e no regime de ondas longas, muitas vezes KC *não será pequeno*, implicando que os efeitos viscosos serão pronunciados (quadro a seguir)



Cilindro circular vertical de diâmetro D=2a

Zonas de domínio das forças de diferentes origens junto a z=0

KC=2πA/D

Regime de ondas longas ka<<1

Extraida de McCormick, M. E. – Ocean Eng. Mech

Aproximação em ondas longas

- **Escolha de C_M e C_D:** dados experimentais de força em cilindros circulares em fluido infinito

Círculo de diâmetro D

KC=UT/D

$\beta = (1/\nu)D^2/T$

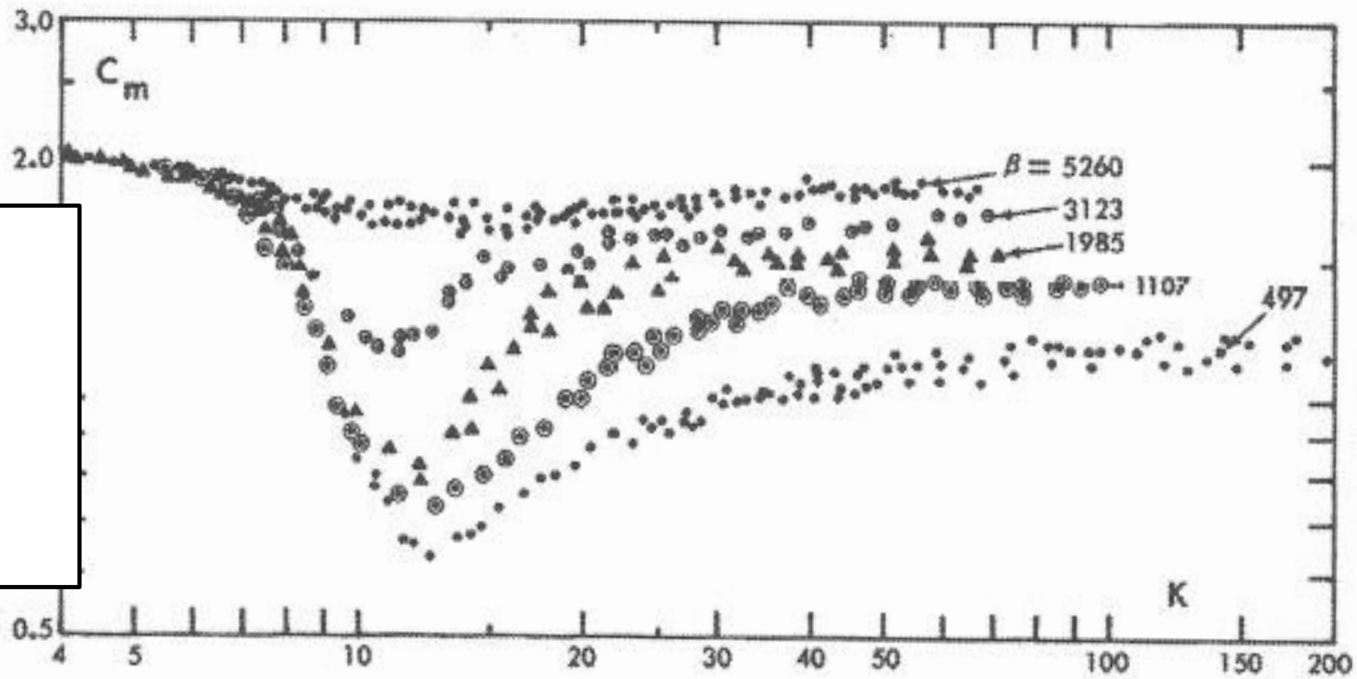


Figure 3.20. C_m versus K data for various values of β (Sarpkaya 1976e).

Extraida de Sarpkaya, T. – Wave Forces on Offshore Struct.

Aproximação em ondas longas

- **Escolha de C_M e C_D:** dados experimentais de força em cilindros circulares em fluido infinito

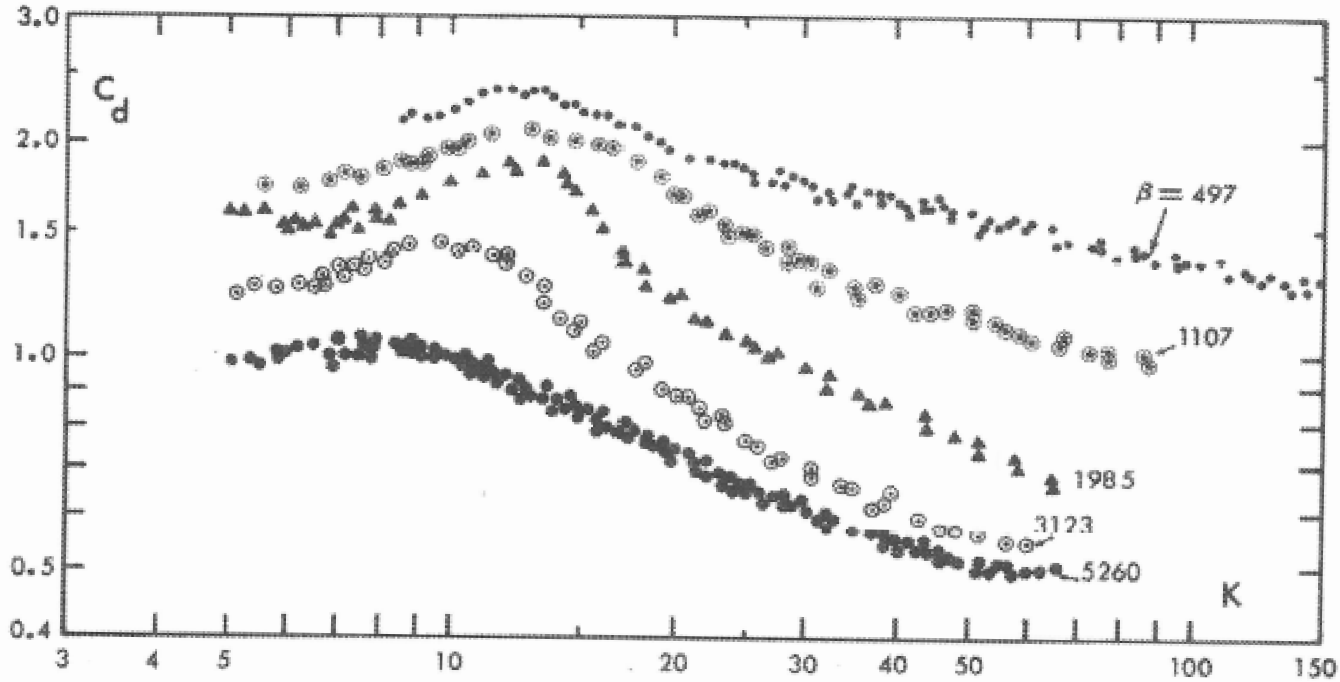


Figure 3.19. C_d versus K data for various values of β (Sarpkaya 1976e).

Extraida de Sarpkaya, T. – Wave Forces on Offshore Struct.

Aproximação em ondas longas

- **Aproximação da solução potencial**: Quando KC é baixo, a força será dominada pelo termo inercial, e o valor do coeficiente C_M tenderá ao valor teórico obtido por escoamento potencial:

$$\boxed{f_{EXC,x}(t) \cong \rho A_s C_{M,pot} \dot{u}(0,0,-z,t)}$$

- e, no caso da seção circular: $$\boxed{C_{M,pot} = \frac{\rho A_S + m_{11}}{\rho A_S} = 2{,}0}$$

- Obs: para se manter a coerência com a teoria linear de ondas, neste caso fazer:

$$F_{EXC}(t) = \int_{-h}^{0} f_{EXC,x}(t)dz$$

- A partir dessa aproximação, podemos estimar as forças e movimentos de estruturas esbeltas em ondas no regime de ondas longas (situação explorada no Exercício 2 da lista #2)

Aproximação em ondas longas

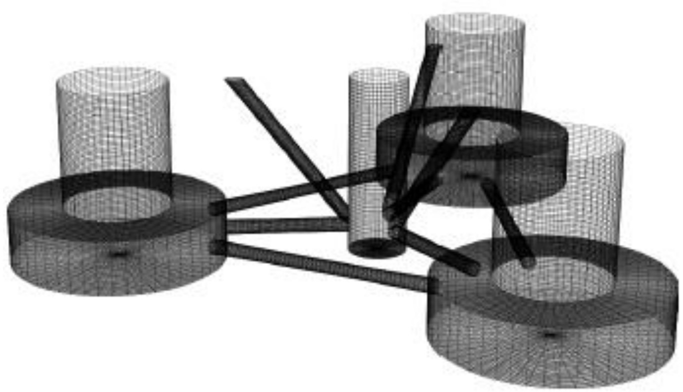
- **Estruturas flutuantes esbeltas**: é comum empregarmos o método relacionado à formula de Morison (tanto para seções horizontais como verticais) para estimar as forças e movimentos de estruturas esbeltas flutuantes com bons resultados.

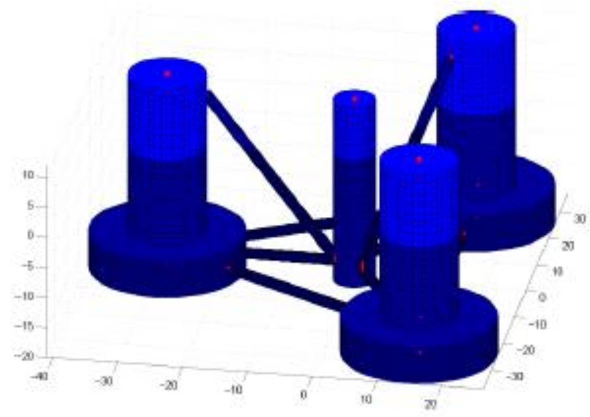
- Exemplo: *Turbina eólica flutuante*

Figuras extraídas de:
Lucas Henrique de Souza Carmo, Trabalho de Formatura PNV2511-12, 2016

Aproximação em ondas longas

Turbina Eólica Flutuante OC4

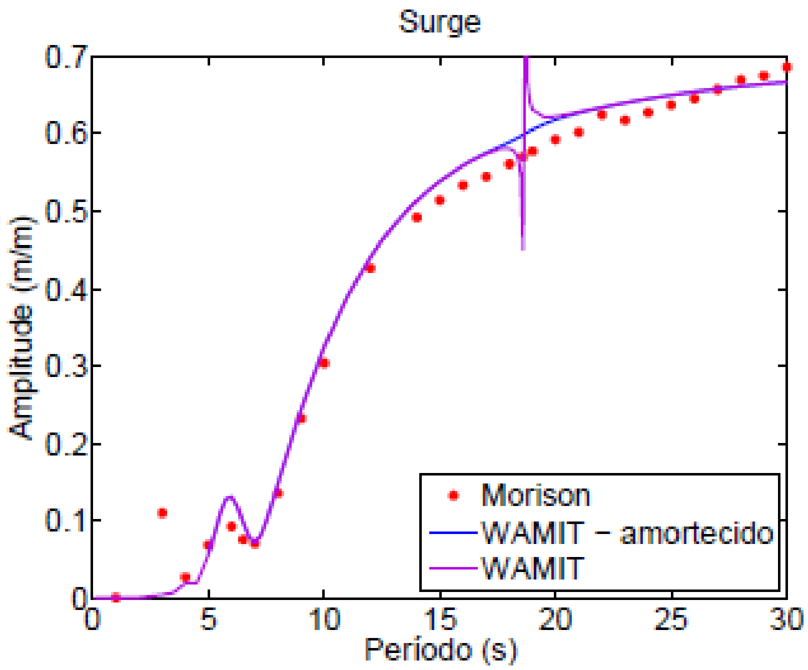




Malha WAMIT X *Modelo em software baseado nas Eqs de Morison*

Aproximação em ondas longas

Turbina Eólica Flutuante OC4

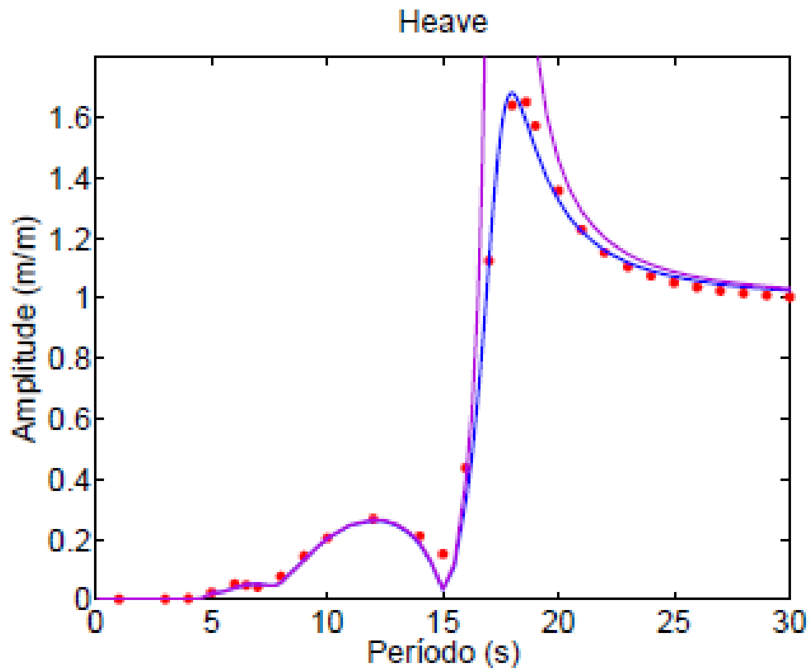


RAOs para ondas com incidência de 45 graus

Extraídas Lucas Henrique de Souza Carmo, Trabalho de Formatura PNV2511-12, 2016

Aproximação em ondas longas

Turbina Eólica Flutuante OC4



RAOs para ondas com incidência de 45 graus

Extraídas Lucas Henrique de Souza Carmo, Trabalho de Formatura PNV2511-12, 2016