4300326 - Introdução à Física de Plasmas e Fusão Nuclear

Ministrado por

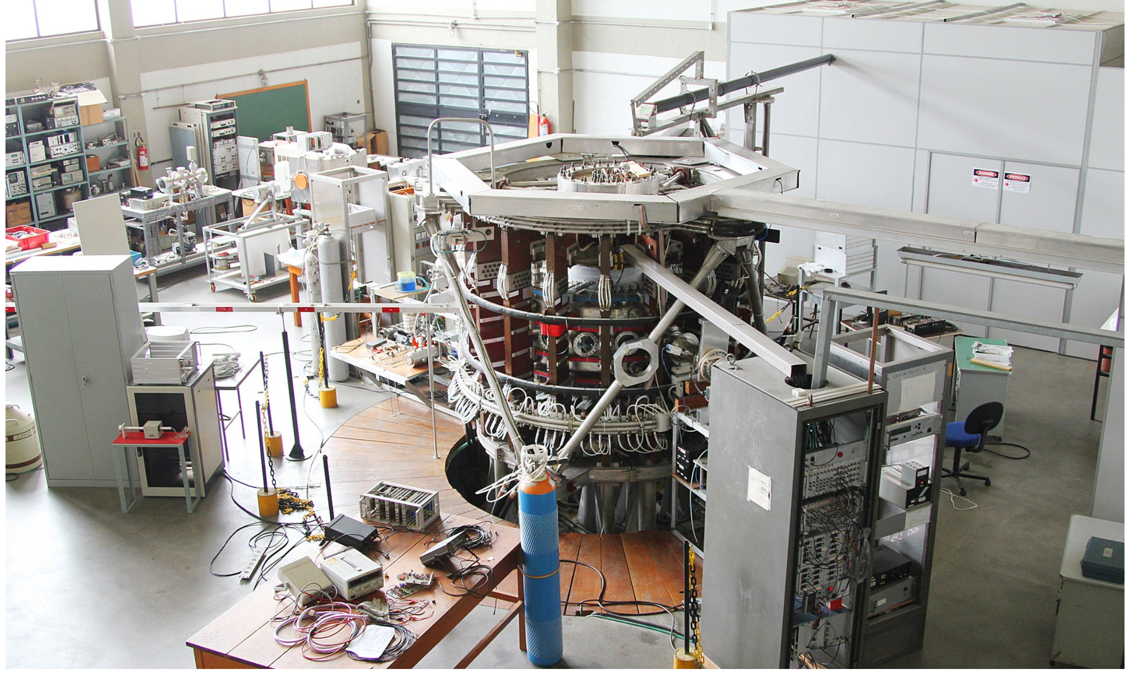
Prof. Gustavo Paganini Canal

Laboratório de Física de Plasmas

Departamento de Física Aplicada

Instituto de Física

Universidade de São Paulo



Curso de graduação oferecido pelo

Instituto de Física da Universidade de São Paulo

IFUSP
Instituto de Física da USP

e-mail: canal@if.usp.br

São Paulo - SP, 21 de agosto de 2023

- **A teoria de órbitas de partículas: o movimento de cargas em campos EMs**
  - *Campo magnético variante no tempo e invariantes adiabáticos*

Deriva devido à variação temporal do campo magnético

- **Como vimos, campos magnéticos não realizam trabalho sobre partículas carregadas**
  - Apenas campos elétricos alteram a energia cinética de uma carga

- **No entanto, sabemos pela lei de Faraday que existe um campo $\mathbf{E}$ associado à uma campo $\mathbf{B}$ variante no tempo**

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- **Para entender o efeito de um campo magnético variante no tempo sobre a órbita de partículas carregadas, vamos supor que exista um campo magnético $\mathbf{B}(t) = B(t)\,\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}}$, de modo que $(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla)\mathbf{B} \ll 1$**

- **Exercício: mostre que o campo elétrico induzido é igual à (veja Bittencourt cap. 4, seção 4.1)**

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{2} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Deriva devido à variação temporal do campo magnético

- **Usando esse resultado na equação de movimento, obtemos**

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mathbf{r}}{2} \times \frac{\partial \mathbf{\Omega}_c}{\partial t} + \mathbf{\Omega}_c \times \mathbf{v}$$

- **No entanto, ao invés de resolver a equação de movimento, iremos abordar o problema calculando a variação na energia cinética perpendicular devido ao campo $\mathbf{B}(t)$**

$$\delta\left(\frac{1}{2}mv_\perp^2\right) = q\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$

  - *Aqui, $d\mathbf{r}$ é um elemento de caminho ao longo da trajetória da partícula de modo que $\mathbf{v}_\perp = d\mathbf{r}/dt$*

- **Supondo que $\frac{1}{|\mathbf{B}|}\left|\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right| \ll \frac{|\mathbf{\Omega}_c|}{2\pi}$, ou seja, que o campo $\mathbf{B}$ varie lentamente com relação ao period ciclotrônico, podemos supor que a trajetória seja fechada**

Deriva devido à variação temporal do campo magnético

- **Dessa forma, temos que**

$$\delta\left(\frac{1}{2}mv_\perp^2\right) = q\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = q\int_S (\nabla\times\mathbf{E})\cdot d\mathbf{S} = -\,q\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} = q\frac{\partial B}{\partial t}\pi\rho^2$$

- **Tomando a variação de $\mathbf{B}$ num período ciclotrônico como sendo**

$$\delta B = \frac{\partial B}{\partial t}\,\delta t = \frac{\partial B}{\partial t}\frac{2\pi}{\Omega_c}$$

- **Usando as relações $\rho^2 = v_\perp^2/\Omega_c^2$ e $\Omega_c = |q|B/m$, temos que**

$$\delta\left(\frac{1}{2}mv_\perp^2\right) = \frac{mv_\perp^2}{2B}\delta B = |\boldsymbol{\mu}|\,\delta B$$

  - *Aqui, $|\boldsymbol{\mu}| = mv_\perp^2/2B$ é o momento magnético devido ao movimento ciclotrônico*

Deriva devido à variação temporal do campo magnético

- **Note, portanto, que como $\mu B = mv_\perp^2/2$, temos que $\delta(\mu B) = \delta(mv_\perp^2/2)$ e assim**

$$\delta\left(\frac{1}{2}mv_\perp^2\right) = \mu\delta B + B\delta\mu$$

- **Comparando com a expressão obtida:**

$$\delta\left(\frac{1}{2}mv_\perp^2\right) = \frac{mv_\perp^2}{2B}\delta B = \mu\delta B$$

Vemos que $\delta\mu = 0$

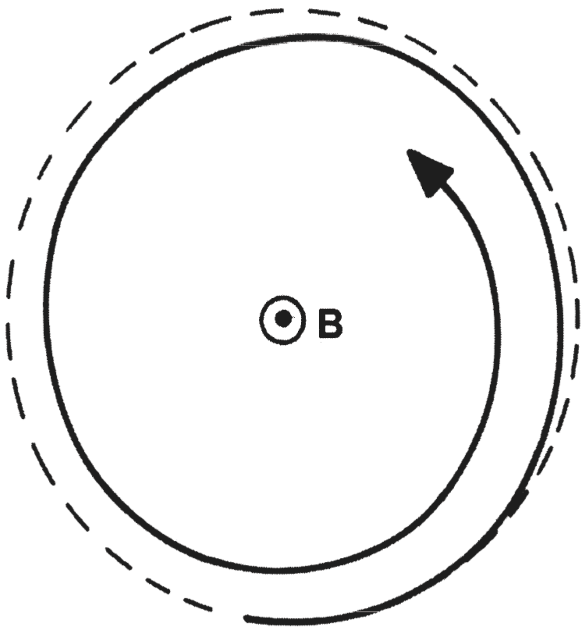
  - *O momento magnético é invariante em campos magnéticos que variam lentamente com relação ao período ciclotrônico*

- **Exercício: mostre, a partir desse resultado, que o fluxo magnético através de uma órbita ciclotrônica, $\Phi = B\pi\rho^2$, também é um invariante adiabático**

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(B\pi\rho^2) = 0$$

Deriva devido à variação temporal do campo magnético

- **No caso mais geral, a órbita da partícula pode ser bastante complicada**
  - *Mesmo sem considerar não-uniformidades no campo* $\mathbf{B}$*, se sua variação for rápida, a órbita da partícula já não se fecha mais*



- **Vamos considerar o caso simples em que** $\mathbf{B}(t) = B(t)\,\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{z}$ **e** $\mathbf{E} = \dfrac{\mathbf{r}}{2} \times \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

  e calcular a deriva ExB devido à esses campos

$$\mathbf{V}_{\mathbf{ExB}} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \left(\frac{\mathbf{r}}{2} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \times \frac{\mathbf{B}}{B^2}$$

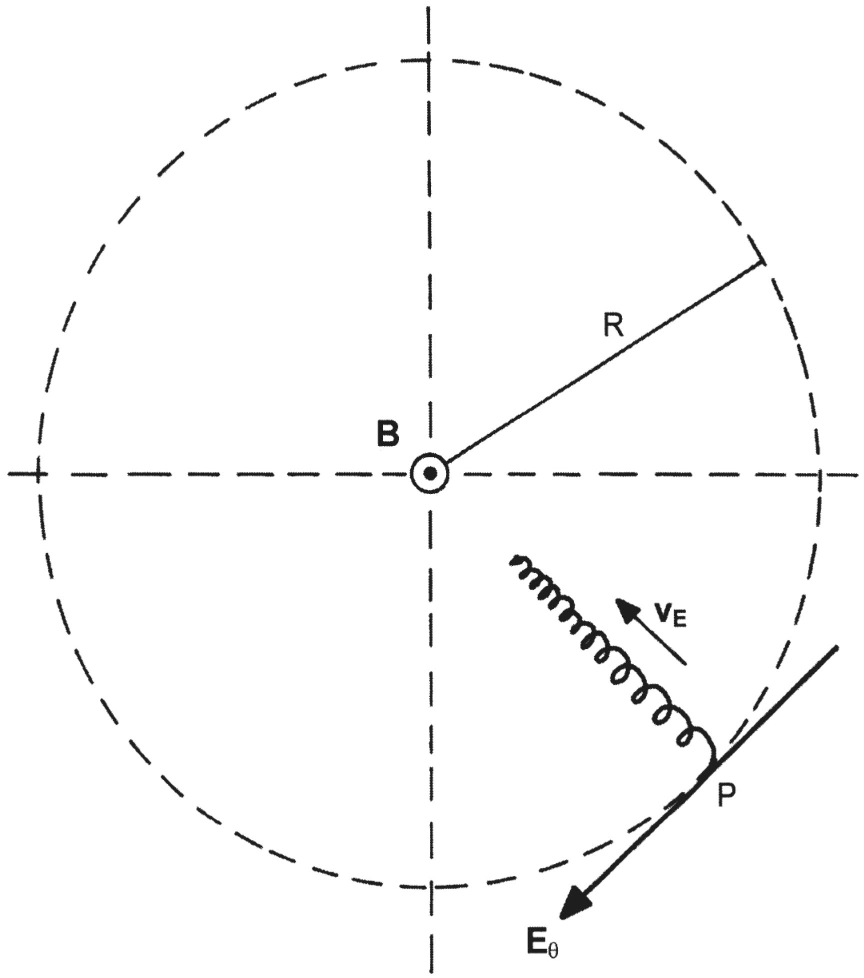
Deriva devido à variação temporal do campo magnético

- **Como $\mathbf{r} \perp \mathbf{B}$, temos que**

$$\mathbf{V}_{\mathbf{ExB}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial t}\frac{\mathbf{r}}{B}$$

$$\mu = \frac{mv_\perp^2}{2B} = \text{const}$$

$$B\pi\rho^2 = \text{const}$$



  - *A medida que a partícula sofre uma deriva radialmente para dentro ($\partial B/\partial t > 0$), seu raio de Larmor diminui*
  - *Como a densidade de linhas de campo aumenta, a deriva radial pode ser interpretada como um movimento radial das linhas de campo, com o centro guia da partícula estando preso (congelado) numa linha de campo*
  - *Esse mecanismo foi utilizado para aquecer plasmas*

Exercício: aquecimento de plasma por compressão adiabática

- **Usando os campos $\mathbf{E_0}$ e $\mathbf{B_0}$ do exercício anterior, siga os passos indicados abaixo**
  - *Suponha que, em $t = t_0$, a energia cinética média de cada partícula seja*

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\langle v_\parallel^2\rangle + \frac{1}{2}m\langle v_\perp^2\rangle = \frac{1}{2}k_B T_\parallel + k_B T_\perp$$

    e que $T_\parallel(t_0) = T_\perp(t_0) = T_0$. Suponha ainda que, entre $t = t_0$ e $t = t_1$, o campo $\mathbf{B_0}$ varie adiabaticamente, $\mathbf{B_0} = B_0\left[1 + \left(t - t_0\right)/\left(t_1 - t_0\right)\right]\hat{\mathbf{k}}$, de modo que não haja tempo para as temperaturas se equilibrarem. Quais os valores de $T_\parallel(t_1)$ e $T_\perp(t_1)$?
  - *Entre $t = t_1$ e $t = t_2$, o campo magnético é mantido constante até que $T_\parallel(t_2) = T_\perp(t_2) = T_2$. Qual é o valor de T_2?*
  - *Entre $t = t_2$ e $t = t_3$, o campo $\mathbf{B_0}$ varia adiabaticamente para seu valor original, $\mathbf{B_0} = B_0\left[2 - \left(t - t_2\right)/\left(t_3 - t_2\right)\right]\hat{\mathbf{k}}$. Novamente, não há tempo suficiente para as temperaturas se equilibrarem. Quais os valores de $T_\parallel(t_3)$ e $T_\perp(t_3)$?*
  - *Entre $t = t_3$ e $t = t_f$, o campo $\mathbf{B_0}$ é mantido constante até que $T_\parallel(t_f) = T_\perp(t_f) = T_f$. Qual é a temperatura final do plasmas?*

Resposta: $T_f = 10\,T_0/9$ (para um único ciclo)

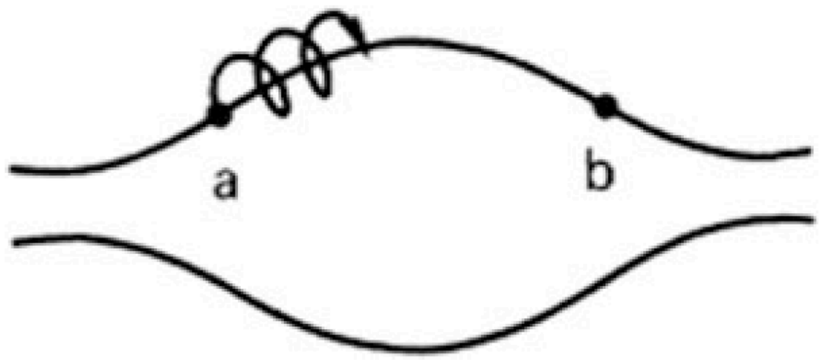
Invariantes adiabáticos

- **O primeiro invariante: momento magnético (ou fluxo magnético)**

$$|\boldsymbol{\mu}| = \frac{mv_\perp^2}{2B} = \text{const} \qquad\qquad B\pi\rho^2 = \text{const}$$

- **O segundo invariante: o invariante longitudinal**

$$J = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint v_\parallel \, dl$$



  – *Esse invariante foi invocado por Enrico Fermi para explicar a existência de partículas carregadas de alta energia (raios cósmicos)*

- **Exercício: mostre que J é um invariante adiabático**

Exercícios

- **Exercício do F.F. Chen:**
  - *2.12, 2.13, 2.14, 2.16, 2.17, 2.18, 2.20 e 2.21*

- **Exercício do Bittencourt:**
  - *3.4*

Referências

- **F.F. Chen**
  - *Capítulo 2, seções 2.6 e 2.8*

- **Referência adicional**
  - *Bittencourt: Cap. 4, seção 4*