

Resolução de estruturas hiperestáticas usando o Teorema dos Esforços Virtuais

PEF 3401 - Mecânica das estruturas II: Exercício 3

Prof. Dr. Carlos Eduardo Nigro Mazzilli

Prof. Dr. João Cyro André

Prof. Dr. Guilherme R. Franzini

Determine o diagrama de momentos fletores para a estrutura ilustrada abaixo. Todas as barras têm rigidez flexional EI . Despreze o efeito da força normal no cálculo do trabalho virtual complementar interno.

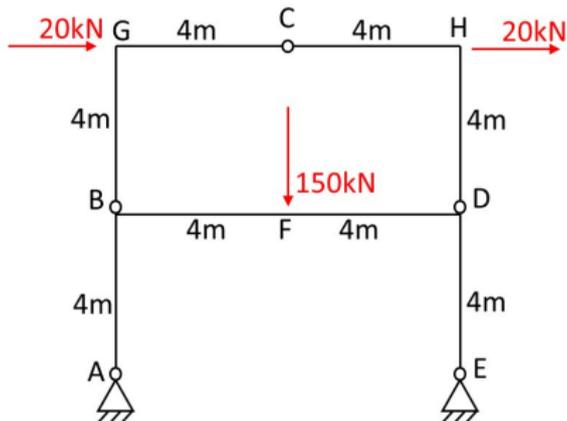


Figura: Representação esquemática do problema

- Como já vimos em um problema semelhante, podemos desmembrar a estrutura fechada em duas sub-estruturas, fazendo um corte pelos pontos B e D e colocando os esforços solicitantes associados (força normal e força cortante, uma vez que esses pontos possuem articulações). A sub-estrutura I é definida pelo trecho BGCHD e é claramente isostática (pórtico tri-articulado). A Figura abaixo ilustra essa sub-estrutura, para a qual é possível facilmente (afinal, é um elemento isostático) determinar os esforços solicitantes mencionados (identificados em roxo) e o diagrama de momentos fletores (em laranja), ambos abaixo ilustrados.

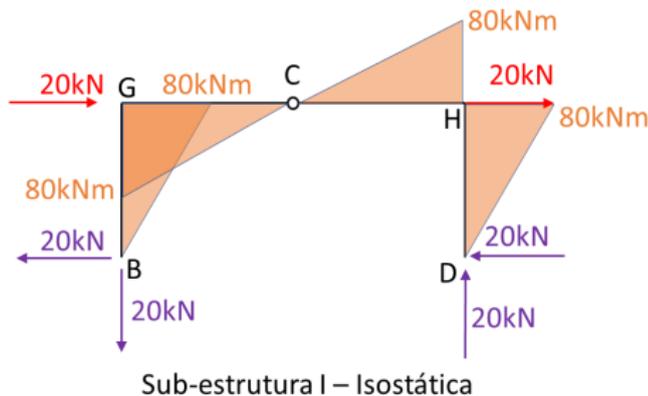


Figura: Sub-estrutura I.

- A sub-estrutura II (trecho ABFDE) é uma vez hiperestática (logo a estrutura completa também o é). Para sua resolução, podemos gerar uma EIF transformando, por exemplo, o apoio duplo em E em um apoio simples. Aqui, geremos uma outra EIF para discutir um conceito importante. Note que os esforços solicitantes nos pontos de corte já estão devidamente considerados **em roxo**, formando pares ação-reação com aqueles aplicados na sub-estrutura I.

Sub-estrutura II – GH=1

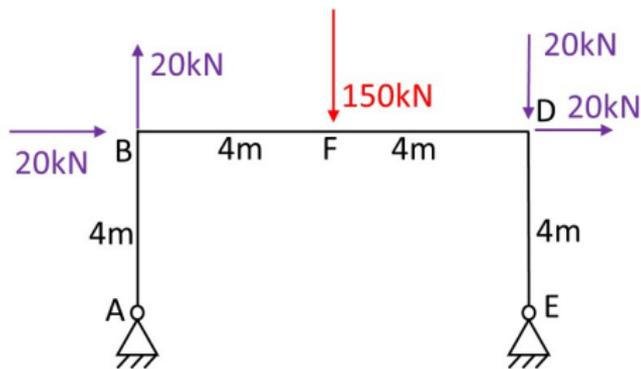


Figura: Sub-estrutura II.

- Considere a EIF abaixo, obtida inserindo uma articulação no ponto F.
Fisicamente, estamos removendo o vínculo que garante a continuidade de rotação nesse ponto.

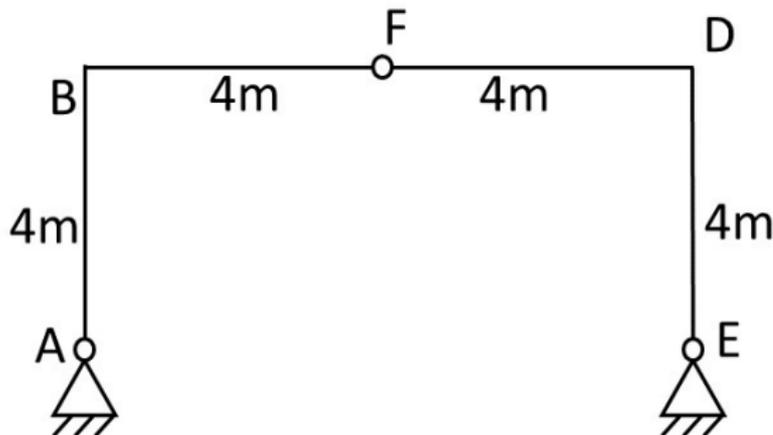


Figura: EIF a ser estudada.

- O problema hiperestático referente à sub-estrutura II pode ser tratado como esquematizado abaixo, como já visto no curso. Note que a incógnita hiperestática X passa a ser o momento fletor no meio do vão BD (ou seja, no ponto onde o vínculo foi suprimido). O esquema à esquerda mostra as ações externas atuantes na EIF (produzindo um diagrama de momentos fletores m). Já a figura à direita mostra os esforços unitários atuando também na EIF, estão associadas a um diagrama de momentos fletores \bar{m} .

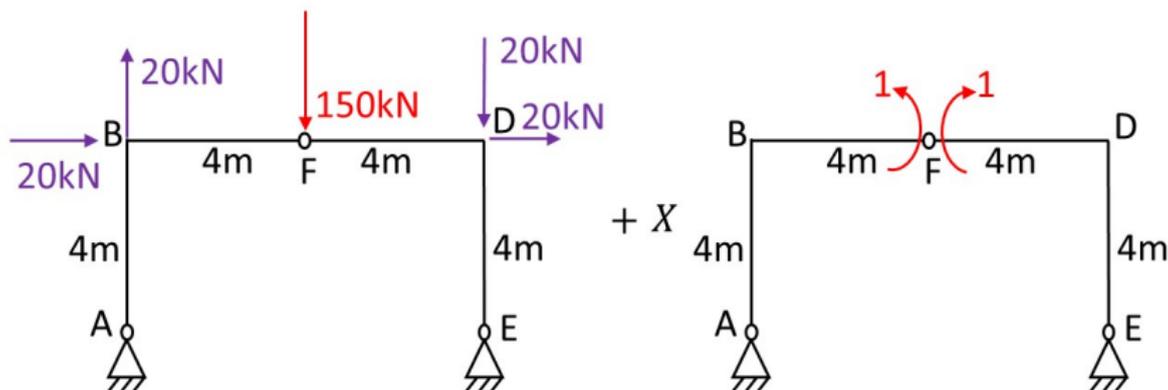


Figura: Tratamento do problema hiperestático.

- As reações vinculares (**em vermelho**) e o diagrama de momentos fletores m (**em laranja**), ambos decorrentes das ações externas na EIF são facilmente obtidos (problema de um pórtico tri-articulado)

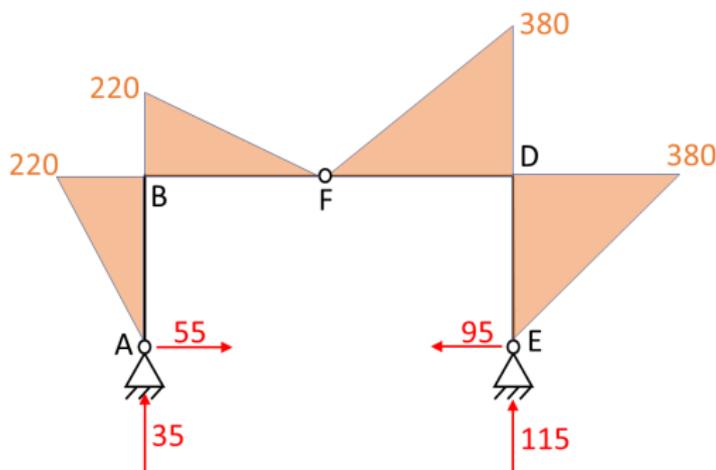


Figura: Ações externas na EIF.

- As reações vinculares (em vermelho) e o diagrama de momentos fletores \bar{m} (em laranja), ambos decorrentes da ação do carregamento unitário na EIF são facilmente obtidos (problema de um pórtico tri-articulado)

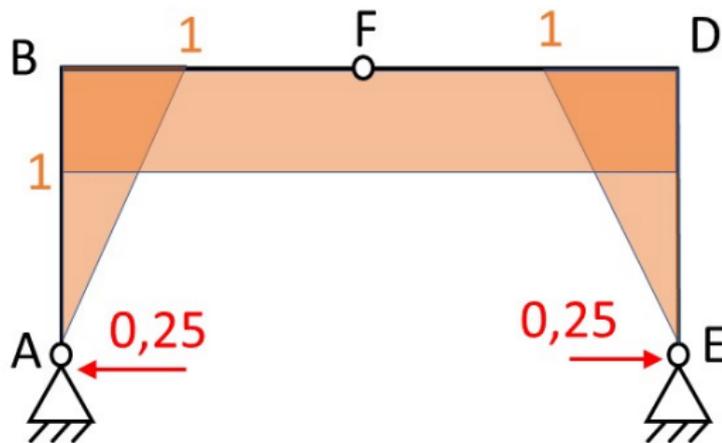


Figura: Ações do carregamento unitário na EIF.

- Para a aplicação do TEV, proponho um campo de esforços virtuais que me permita usar a equação referente ao vínculo removido. No caso, é conhecido que as rotações à esquerda e à direita da articulação são iguais. Usando o campo de esforços virtuais abaixo ilustrado, vemos que o diagrama de momentos fletores virtuais δM coincide com o diagrama \bar{m} e que as reações de apoio virtuais coincidem com aquelas obtidas para o carregamento unitário atuando na EIF. No problema em questão, $\delta T_e^* = 0$ pois não há recalque de apoios e que a rotação à esquerda do ponto F é o negativo do valor à direita do mesmo ponto.

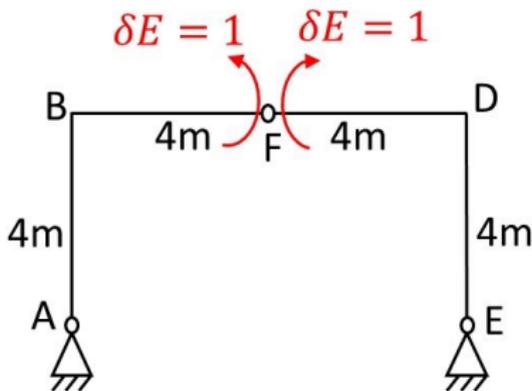


Figura: Proposição de esforços virtuais na EIF.

- Como não existem molas ou efeitos de variação térmica, apenas o termo relacionado à flexão (já discutido ser preponderante sobre o de força normal) é contabilizado
- Parcela do trabalho virtual complementar interno associada à flexão (os sinais negativos indicam que m e \bar{m} tracionam em lados diferentes):

$$\begin{aligned}
 \delta T_i^* &= \int \frac{\delta M M}{EI} ds = \int \frac{\delta M(m + X\bar{m})}{EI} ds = \int \frac{m\bar{m}}{EI} ds + X \int \frac{\bar{m}^2}{EI} ds \\
 \int \frac{m\bar{m}}{EI} ds &= \underbrace{\frac{4}{6EI} (1 \times (-2 \times 220 + 0))}_{AB} + \underbrace{\frac{1}{EI} \left(-220 \times \frac{4}{2} - 380 \times \frac{4}{2} \right)}_{BD} + \\
 &\quad \underbrace{\frac{4}{6EI} (1 \times (-380 \times 2 + 0))}_{DE} \\
 \int \frac{\bar{m}^2}{EI} ds &= \underbrace{\frac{4}{6EI} (1 \times (2 \times 1 + 0))}_{AB} + \underbrace{\frac{8}{EI}}_{BD} + \underbrace{\frac{4}{6EI} (1 \times (2 \times 1 + 0))}_{DE}
 \end{aligned}$$

- Trabalho virtual complementar interno:

$$\delta T_i^* = \delta T_e^* = 0 \rightarrow X = -\frac{\int \frac{m\bar{m}}{EI} ds}{\int \frac{\bar{m}^2}{EI} ds} = 187,5\text{kNm}$$

- O diagrama de momentos fletores para a sub-estrutura II (uma vez hiperestática) é obtido lembrando que $M = m + X\bar{m}$. Já o diagrama de momentos fletores da estrutura completa pode ser obtido pela composição do diagrama de momentos fletores reais da sub-estrutura II com o diagrama de momentos fletores obtidos para a sub-estrutura I (isostática). **Note que a expressão $M = m + X\bar{m}$ é válida apenas para a sub-estrutura II!!!**. A Figura a seguir ilustra o diagrama de momentos fletores da estrutura completa.

Note que o momento fletor em F é o valor da incógnita hiperestática!!

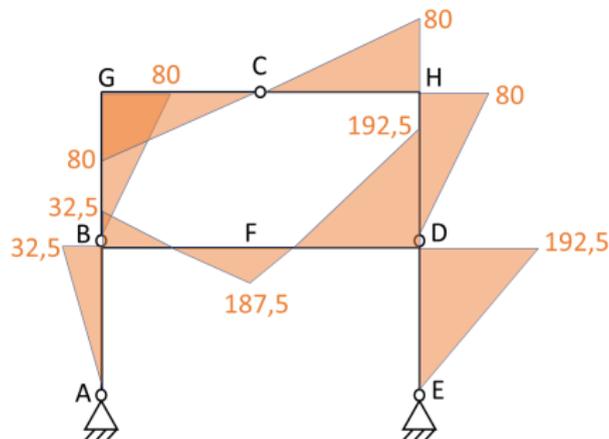


Figura: Diagrama de momentos fletores da estrutura completa.