

Resolução de estruturas hiperestáticas usando o Teorema dos Esforços Virtuais

PEF 3401 - Mecânica das estruturas II: Exercício 2

Prof. Dr. Carlos Eduardo Nigro Mazzilli
Prof. Dr. João Cyro André
Prof. Dr. Guilherme R. Franzini

A viga poligonal ABCD está sujeita a recalques de apoio e à variação de temperatura. Os comprimentos das barras são $L_{AB} = 3\text{m}$, $L_{BC} = 4\text{m}$ e $L_{CD} = 5\text{m}$. As barras têm rigidez flexional $EI = 25000\text{kNm}^2$ e são feitas de material de constante de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ e têm a seção transversal de altura $h = 0,5\text{m}$. Obtenha o diagrama de momentos fletores e a rotação no ponto C. Considere os seguintes valores numéricos: $\delta_A = 3\text{mm}$, $\delta_D = 2\text{mm}$, $\phi_A = 5 \times 10^{-3}\text{rad}$, $\Delta\theta_1 = -10^\circ\text{C}$ e $\Delta\theta_2 = 10^\circ\text{C}$.

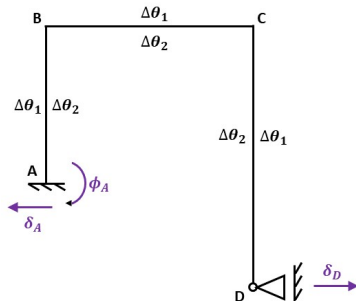


Figura: Representação esquemática do problema

- Como visto no curso, desmembramos o problema hiperestático em um problema no qual as ações externas atuam na estrutura isostática fundamental (EIF) escolhida removendo GH vínculos redundantes (no caso em estudo, $GH=1$ e a EIF foi obtida suprimindo o vínculo no ponto D), superposto ao problema do carregamento unitário associado ao vínculo removido multiplicado pela incógnita hiperestática X (aqui, a reação vincular no ponto D).

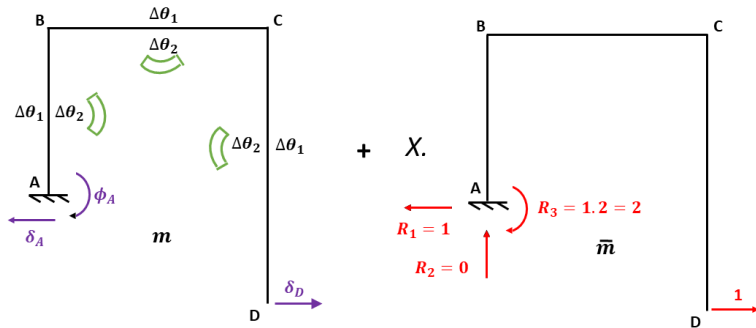


Figura: Desmembramento do problema hiperestático.

- Curvatura decorrente apenas da variação térmica (em módulo), válida para todas as barras: $|w''_{\theta}| = \alpha \frac{(\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2)}{h} = \frac{20 \times 10^{-5}}{5 \times 10^{-1}} = 4 \times 10^{-4} \text{ 1/m};$
- Momento fletor na estrutura hiperestática (real): $M = m + X\bar{m}$ com m o diagrama de momentos fletores decorrentes das ações externas na EIF e \bar{m} o diagrama de momentos fletores decorrentes da ação do carregamento unitário atuando na EIF. Note que as ações externas atuantes na EIF contemplam recalques de apoio e efeito de variação térmica, o que leva a $m = 0$.

- Mostra-se, na segunda Figura desta apresentação e **em verde**, as curvaturas induzidas pela variação térmica. Como mencionado, $m = 0$ no problema em estudo, pois as ações externas na EIF envolvem recalques de apoio e efeitos de variação térmica.

- Como no exemplo anterior, o campo de esforços virtuais será proposto na EIF e associado ao vínculo removido, de tal forma que o diagrama de momentos fletores decorrente da ação do carregamento unitário seja igual ao diagrama de momentos fletores virtuais ($\bar{m} = \delta M$).
- A Figura abaixo mostra as reações vinculares virtuais na viga poligonal ABCD (em vermelho) e o diagrama de momentos fletores virtuais $\delta M = \bar{m}$ (em laranja) decorrentes da ação do campo de esforços virtuais proposto na EIF.

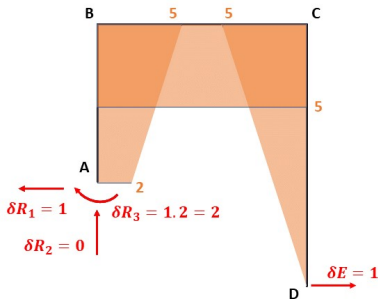


Figura: Esforços solicitantes e reações vinculares virtuais.

- Parcela do trabalho virtual complementar interno associada à variação térmica:
 Todos os sinais são positivos, pois δM tende a curvar no mesmo sentido de w_θ'' :

$$\begin{aligned} \delta T_{i,\theta}^* &= \int \delta M(-w_\theta'') ds = \int_{AB} |\delta M||w_\theta''| ds + \int_{BC} |\delta M||w_\theta''| ds + \int_{CD} |\delta M||w_\theta''| ds = \\ &= \underbrace{4 \times 10^{-4}}_{|w_\theta''|} \left(\underbrace{(2+5)}_{AB} \frac{3}{2} + \underbrace{5 \times 4}_{BC} + \underbrace{\frac{5 \times 5}{2}}_{CD} \right) = 172 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

- Parcela do trabalho virtual complementar interno associada à flexão:

$$\begin{aligned} \delta T_{i,fl}^* &= \int \frac{\delta M M}{EI} ds = \int \frac{\delta M(m + X\bar{m})}{EI} ds = \underbrace{\int \frac{m\bar{m}}{EI} ds}_{0, \text{ pois } m=0} + X \int \frac{\bar{m}^2}{EI} ds = \\ &X \left(\frac{3}{6EI} (2(2 \times 2 + 5) + 5(2 \times 5 + 2)) + \frac{5 \times 5 \times 4}{EI} + \frac{5}{6EI} (5(2 \times 5)) \right) = 7,2 \times 10^{-3} X \end{aligned}$$

- Trabalho virtual complementar interno:

$$\delta T_i^* = \delta T_{i,\theta}^* + \delta T_{i,fl}^* = 172 \times 10^{-4} + 7,2 \times 10^{-3} X$$

- Trabalho virtual complementar externo (Prestar atenção nos sentidos das reações de apoio virtuais e os deslocamentos prescritos aos vínculos!!!!!! No caso, os trabalhos todos são positivos, pois os sentidos das reações de apoio e dos recalques conjugados são os mesmos):

$$\delta T_e^* = \delta R_1 \delta_A + \delta R_3 \phi_A + \delta E \delta_D = 3 \times 10^{-3} + 2 \times 5 \times 10^{-3} + 1 \times 2 \times 10^{-3} = 15 \times 10^{-3}$$

- Aplicação do TEV: $\delta T_i^* = \delta T_e^* \rightarrow X = -0,306 \text{ kN}$

- O diagrama de momentos fletores reais pode ser obtido lembrando do desmembramento do problema hiperestático, ou seja, lembrando que $M = m + X\bar{m}$, com $m = 0$ no presente problema. O mesmo comentário é válido com relação às reações vinculares do problema hiperestático (não exibidas). As unidades da figura abaixo, representativa da solução do problema hiperestático são kN e m.

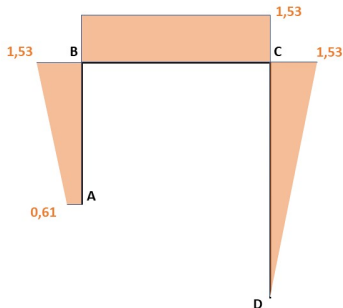
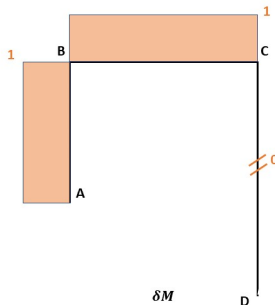
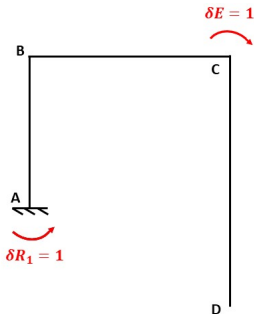


Figura: Solução do problema hiperestático - diagrama de momentos fletores e reações vinculares.

- Foi visto no curso que o cálculo de deslocamento em estruturas hiperestáticas via TEV pode ser feito aplicando-se os esforços virtuais na EIF (**Lembrem-se de que os esforços virtuais são equilibrados, algo facilmente feito em uma EIF**). Assim, propomos o campo de esforços virtuais ilustrado à esquerda que, por sua vez, está associado ao diagrama de momentos fletores virtuais δM e às reações vinculares virtuais ilustradas à direita:



(a) Esforços virtuais propostos. (b) δM e reações vinculares virtuais.

- Parcela do trabalho virtual complementar interno associado à variação térmica (Observe os sinais (-) decorrentes da diferença entre os lados em tração por conta da variação térmica e de δM):

$$\begin{aligned} \delta T_{i,\theta}^* &= \int \delta M (-w_\theta'') ds = \\ &= - \int_{AB} |\delta M| |w_\theta''| ds - \int_{BC} |\delta M| |w_\theta''| ds + \underbrace{0}_{\delta M=0 \text{ em } CD} = \\ &= -(4 \times 10^{-4} \times 1 \times 3) - (4 \times 10^{-4} \times 1 \times 4) = -28 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

- Parcela do trabalho virtual complementar interno associado à flexão (Lembrem-se de que, para o cálculo de deslocamentos em estruturas hiperestáticas, é necessário conhecer o diagrama de momentos fletores da estrutura real!! Observe que M e δM tracionam o mesmo lado, levando a um trabalho positivo em AB e BC. Como $\delta M = 0$ em CD, essa última barra não contribui no termo em cálculo.):

$$\delta T_{i,\theta}^* = \int \delta M \frac{M}{EI} ds = \underbrace{\frac{1}{EI} \left(1 \times (1,53 + 0,61) \frac{3}{2} \right)}_{AB} + \underbrace{\frac{1}{EI} (1 \times 1,53 \times 4)}_{BC} = 3,7 \times 10^{-4}$$

- Trabalho virtual complementar interno $\delta T_i^* = \delta T_{i,\theta}^* + \delta T_{i,fl}^* = -24,3 \times 10^{-4}$;
- Trabalho virtual complementar externo $\delta T_e^* = \delta E\phi_C - \delta R_1\phi_A = \phi_C - 5 \times 10^{-3}$
(o primeiro sinal positivo indica que escolhemos ϕ_C no mesmo sentido do esforço virtual δE (horário). O segundo sinal negativo vem da diferença de sentido entre a reação vincular virtual δR_1 e o deslocamento angular real (recalque) em A).
- Aplicação do TEV: $\delta T_i^* = \delta T_e^* \leftrightarrow \phi_C = 2,6 \times 10^{-3}$ rad (o sinal positivo obtido indica que, de fato, a rotação é no sentido horário).