

Resolução de estruturas hiperestáticas usando o Teorema dos Esforços Virtuais

PEF 3401 - Mecânica das estruturas II: Exercício 1

Prof. Dr. Carlos Eduardo Nigro Mazzilli

Prof. Dr. João Cyro André

Prof. Dr. Guilherme R. Franzini

Considere o sistema estrutural abaixo ilustrado formado pelas barras AB, BC e BD, todas de comprimento igual a 4m. A estrutura reticulada é solicitada por um momento concentrado e por variação de temperatura caracterizada por $\Delta\theta_1 = 20^\circ\text{C}$ e $\Delta\theta_2 = -20^\circ\text{C}$. As molas 1 e 2 têm, respectivamente, rigidez $k_1 = 10^4\text{kN/m}$ e $k_2 = k_1/2$. As barras têm seção transversal retangular $b \times h = 0,20\text{m} \times 0,40\text{m}$ e são feitas de material de constante de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ e módulo de elasticidade $E = 2,5 \times 10^7\text{kN/m}^2$. Obtenha o diagrama de momentos fletores e a rotação no ponto B.

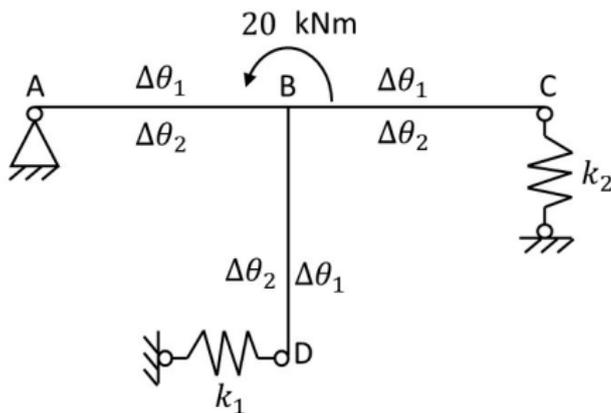


Figura: Representação esquemática do problema

- Como visto no curso, desmembramos o problema hiperestático em um problema no qual as ações externas atuam na estrutura isostática fundamental (EIF) escolhida removendo GH vínculos redundantes (no caso em estudo, $GH=1$ e a EIF foi obtida desconectando a mola 1 do restante da estrutura) superposto ao problema do carregamento unitário associado ao vínculo removido multiplicado pela incógnita hiperestática X (aqui, a força na mola 1).

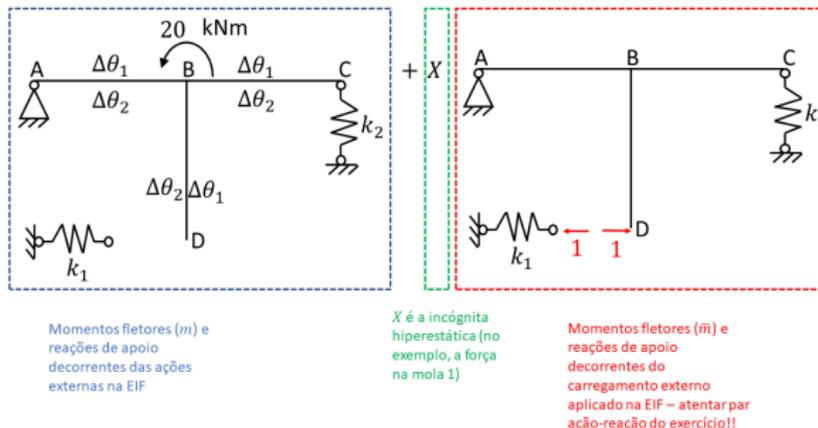


Figura: Desmembramento do problema hiperestático.

- Momento de inércia: $I = \frac{bh^3}{12} = 1,06 \times 10^{-3} \text{m}^4$;
- Força real na mola 1: $F_{m,1} = 0 + 1X$;
- Força real na mola 2: $F_{m,2} = 2,5 + \frac{X}{2}$;
- Curvatura decorrente apenas da variação térmica (em módulo):
 $|w''_{\theta}| = \alpha \frac{(\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2)}{h} = \frac{40 \times 10^{-5}}{4 \times 10^{-1}} = 10^{-3} \text{l/m}$;
- Momento fletor na estrutura hiperestática (real): $M = m + X\bar{m}$ com m o diagrama de momentos fletores decorrentes das ações externas na EIF e \bar{m} o diagrama de momentos fletores decorrentes da ação do carregamento unitário atuando na EIF.

- A Figura abaixo mostra as reações vinculares na viga poligonal ABCD (em vermelho) e o diagrama de momentos fletores m (em laranja) decorrentes das ações externas atuando na EIF. Também são mostradas, em verde, as curvaturas induzidas pela variação térmica.

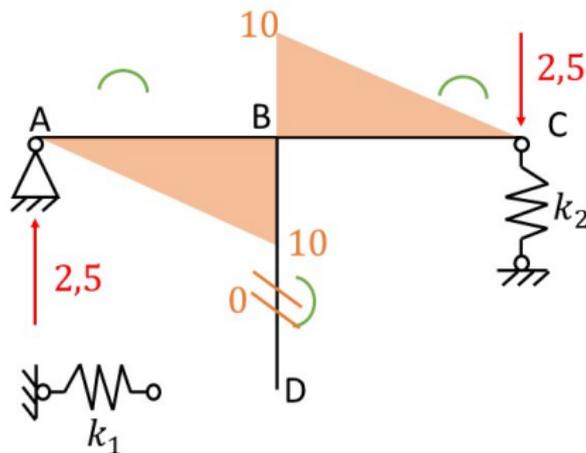


Figura: Esforços solicitantes e reações vinculares decorrentes das ações externas na EIF.

- A Figura abaixo mostra as reações vinculares na viga poligonal ABCD (em vermelho) e o diagrama de momentos fletores m (em laranja) decorrentes da ação do carregamento unitário atuando na EIF.

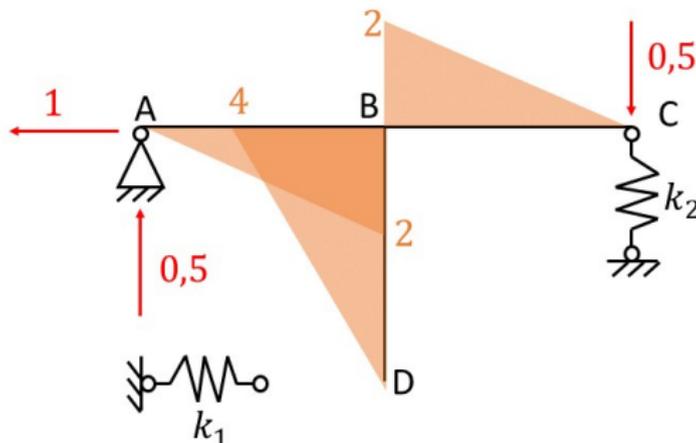


Figura: Esforços solicitantes e reações vinculares decorrentes da ação do carregamento unitário na EIF.

- Para a aplicação do TEV, propomos o seguinte campo de esforços virtuais **sobre a EIF**, motivado pela escolha feita para a EIF. Note que os esforços virtuais são, por definição, esforços equilibrados e é trivial essa proposição na EIF. Veja, ainda, que os esforços virtuais propostos levam a $\delta M = \bar{m}$ e a reações vinculares virtuais iguais àquelas obtidas quando da aplicação do carregamento unitário na EIF.

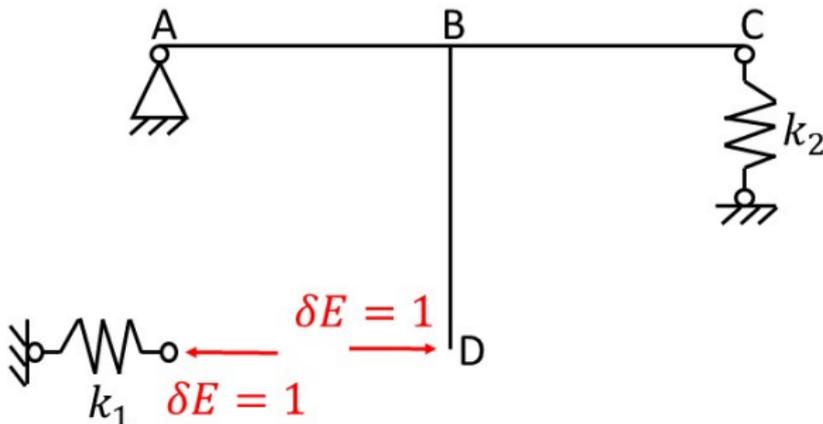


Figura: Esforços virtuais propostos.

- Parcela do trabalho virtual complementar interno associada à variação térmica:
Atendem para os sinais, associados à diferença (-) ou igualdade (+) entre os lados tracionados por δM e a curvatura decorrente da ação térmica:

$$\begin{aligned} \delta T_{i,\theta}^* &= \int \delta M(-w_\theta'') ds = - \int_{AB} |\delta M||w_\theta''| ds + \int_{BC} |\delta M||w_\theta''| ds - \int_{BD} |\delta M||w_\theta''| ds = \\ &= -10^{-3} \times \frac{2 \times 4}{2} + 10^{-3} \times \frac{2 \times 4}{2} - 10^{-3} \times \frac{4 \times 4}{2} = -8 \times 10^{-3} = -80 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Notem o diagrama δM

- Parcela do trabalho virtual complementar interno associada à flexão:

$$\begin{aligned} \delta T_{i,fl}^* &= \int \frac{\delta M M}{EI} ds = \int \frac{\delta M(m + X\bar{m})}{EI} ds = \int \frac{m\bar{m}}{EI} ds + X \int \frac{\bar{m}^2}{EI} ds = \\ &= \underbrace{\frac{4}{6EI} (10(2 \times 2 + 0))}_{AB} + \underbrace{\frac{4}{6EI} (-10(-2 \times 2 + 0))}_{BC} + \underbrace{0}_{BD} + \\ &+ X \left(\underbrace{2}_{\text{"simetria em } \delta M"} \frac{4}{6EI} (2 \times 2 \times 2) + \frac{4}{6EI} (4 \times (2 \times 4 + 0)) \right) = \frac{320}{6EI} + X \frac{192}{6EI} = \\ &= 20 \times 10^{-4} + 12 \times 10^{-4} X \end{aligned}$$

- Parcela do trabalho virtual complementar interno associada às molas:

$$\begin{aligned} \delta T_{i,molas}^* &= \delta F_{m,1} \underbrace{\frac{F_{m,1}}{k_1}}_{s_{real,1}} + \delta F_{m,2} \underbrace{\frac{F_{m,2}}{k_2}}_{s_{real,2}} = 1 \times \frac{X}{k_1} + \frac{1}{2} \left(2,5 + \frac{X}{2} \right) \frac{1}{k_2} = \\ &= 2,5 \times 10^{-4} + 1,5 \times 10^{-4} X \end{aligned}$$

- Trabalho virtual complementar interno:

$$\begin{aligned} \delta T_i^* &= \delta T_{i,\theta}^* + \delta T_{i,fl}^* + \delta T_{i,molas}^* = \\ &= -80 \times 10^{-4} + 20 \times 10^{-4} + 12 \times 10^{-4} X + 1,5 \times 10^{-4} X + 2,5 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

- Como não há recalque de no apoio A, o trabalho virtual complementar externo é nulo ($\delta T_e^* = 0$)
- Aplicação do TEV: $\delta T_i^* = \delta T_e^* = 0 \rightarrow X = 4,26\text{kN}$

- O diagrama de momentos fletores reais pode ser obtido lembrando do desmembramento do problema hiperestático, ou seja, lembrando que $M = m + X\bar{m}$. O mesmo comentário é válido com relação às reações vinculares do problema hiperestático. As unidades da figura abaixo, representativa da solução do problema hiperestático são kN e m.

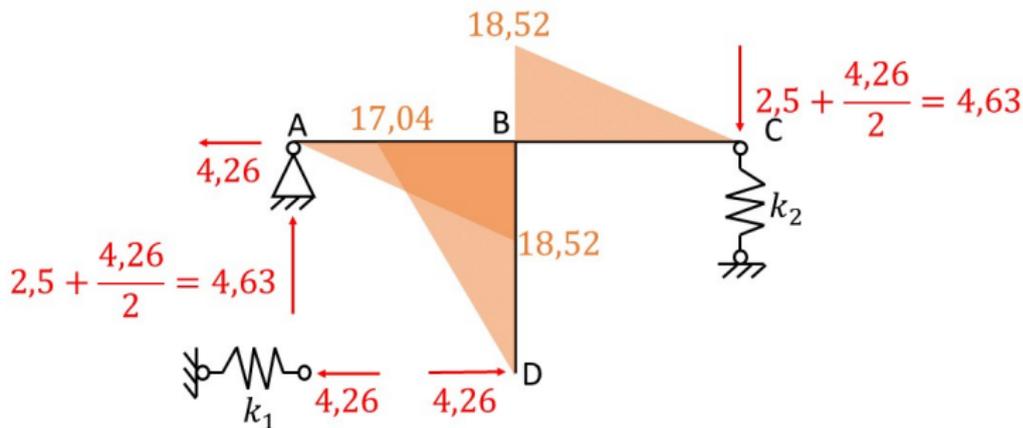


Figura: Solução do problema hiperestático - diagrama de momentos fletores e reações vinculares.

- Foi visto no curso que o cálculo de deslocamento em estruturas hiperestáticas via TEV pode ser feito aplicando-se os esforços virtuais na EIF (**Lembrem-se de que os esforços virtuais são equilibrados, algo facilmente feito em uma EIF**). Assim, propomos o campo de esforços virtuais ilustrado à esquerda que, por sua vez, está associado ao diagrama de momentos fletores virtuais δM e às reações virtuais ilustradas à direita:

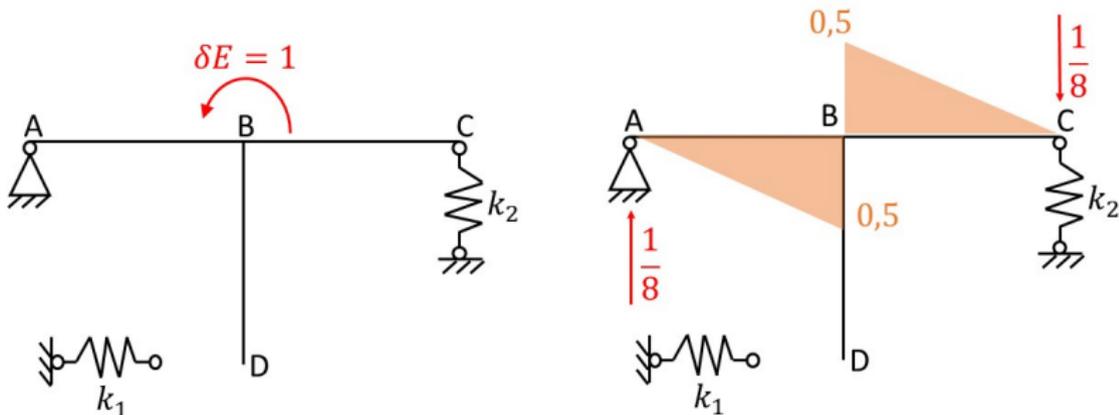


Figura: Esforços virtuais propostos na EIF.

- Parcela do trabalho virtual complementar interno associado à variação térmica: $\delta T_{i,\theta}^* = \int \delta M(-w_\theta'') ds = 0$ (ver anti-simetria do diagrama δM do problema de cálculo de deslocamentos);
- Parcela do trabalho virtual complementar interno associado à flexão (Lembrem-se de que, para o cálculo de deslocamentos em estruturas hiperestáticas, é necessário conhecer o diagrama de momentos fletores da estrutura real!!):

$$\delta T_{i,fl}^* = \int \delta M \frac{M}{EI} ds = \underbrace{2}_{\text{simetria de } M\delta M} \times \frac{4}{6EI} (18,52 \times (2 \times 0,5 + 0)) =$$

$$= \frac{8 \times 18,52}{6EI} = 9,26 \times 10^{-4}$$

- Parcela do trabalho virtual complementar interno associado às molas:

$$\delta T_{i,molas}^* = \underbrace{\delta F_{m,1}}_{s_{real,1}} \frac{F_{m,1}}{k_1} + \underbrace{\delta F_{m,2}}_{s_{real,2}} \frac{F_{m,2}}{k_2} = 0 \times \frac{4,26}{k_1} + \frac{1}{8} \frac{4,63}{k_2} = 1,16 \times 10^{-4}$$

- Trabalho virtual complementar interno

$$\delta T_i^* = \delta T_{i,\theta}^* + \delta T_{i,fl}^* + \delta T_{i,molas}^* = 9,26 \times 10^{-4} + 1,16 \times 10^{-4} = 10,42 \times 10^{-4};$$

- Trabalho virtual complementar externo $\delta T_e^* = \delta E \phi_B = \phi_B$ (o sinal positivo em δT_e^* implicitamente indica que assumimos a rotação em sentido anti-horário).
- Aplicação do TEV: $\delta T_i^* = \delta T_e^* \leftrightarrow \phi_B = 1,042 \times 10^{-3} \text{ rad}$ (o sinal positivo obtido indica que, de fato, a rotação é no sentido anti-horário).
- Caso também fosse solicitado o valor do deslocamento horizontal na mola 1, o resultado é trivial. Como conhecemos o valor real da força nessa mola, bastaria dividir essa força pela constante de rigidez dessa mola. Vale o comentário análogo para a mola 2.