Problema 2

Chame de pontos os elementos do conjunto S := $\{A, B, C, D, E, F, G\}$, chame de retas os seguintes subconjuntos de S,
$r_1 = \{A, B, D\}$, $r_2 = \{A, F, E\}$, $r_3 = \{A, C, G\}$, $r_4 = \{G, F, B\}$, $r_5 = \{G, E, D\}$, $r_6 = \{D, F, C\}$, $r_7 = \{C, B, E\}$,
diga que um ponto P está numa reta r se P $\in$ r. Mostre que:
(a) com essas interpretações, obtemos um modelo da geometria de inciência;
(b) não existem paralelas;
(c) por cada ponto passam três retas.
Demonstração:

(a) Devemos mostrar que os três axiomas de incidência são satisfeitos
- Axioma I1
devemos mostrar que, para cada par de pontos, existe uma única reta que passa por ambos. Considerando o par de pontos A e B, a única reta que contém ambos é a reta r_1, pois A e B pertencem simultâneamente a r_1 e não pertencem simultâneamente a nenhuma outra reta. Analogamente, considerando o par de pontos A e C, a única reta que contém ambos é r_3;
considerando o par de pontos A e D, a única reta que contém ambos é r_1;
considerando o par de pontos A e E, a única reta que contém ambos é r_2;
considerando o par de pontos A e F, a única reta que contém ambos é r_2;
considerando o par de pontos A e G, a única reta que contém ambos é r_3;
considerando o par de pontos B e C, a única reta que contém ambos é r_7;
considerando o par de pontos B e D, a única reta que contém ambos é r_1;
considerando o par de pontos B e E, a única reta que contém ambos é r_7;
considerando o par de pontos B e F, a única reta que contém ambos é r_4;
considerando o par de pontos B e G, a única reta que contém ambos é r_4;
considerando o par de pontos C e D, a única reta que contém ambos é r_6;
considerando o par de pontos C e E, a única reta que contém ambos é r_7;
considerando o par de pontos C e F, a única reta que contém ambos é r_6;
considerando o par de pontos C e G, a única reta que contém ambos é r_3;
considerando o par de pontos D e E, a única reta que contém ambos é r_5;
considerando o par de pontos D e F, a única reta que contém ambos é r_6;
considerando o par de pontos D e G, a única reta que contém ambos é r_5;
considerando o par de pontos E e F, a única reta que contém ambos é r_2;
considerando o par de pontos E e G, a única reta que contém ambos é r_5;
considerando o par de pontos F e G, a única reta que contém ambos é r_4.
Como se esgotaram os casos, provamos que para quaisquer dois pontos, existe uma única reta que passa por ambos. Portanto, o axioma I1 é satisfeito. CQD.
- Axioma I2
Devemos mostrar que dada uma reta, existem pelo menos dois pontos que estão nela. Neste caso as retas foram definidas como conjuntos de três elementos, e como os pontos são os elementos de tais conjuntos, existem exatamente três pontos em cada uma das retas. Em particular, existem pelo menos dois pontos em cada uma das retas. CQD.

- Axioma I3

Devemos mostrar que existem pelo menos três pontos não colineares. Considerando a reta r_1, os pontos A e B estão nela, mas o ponto C não está. Por I1, a única reta que contém A e B é r_1, portando não existe nenhuma reta que contenha A, B e C simultânemente. Portanto, os pontos A, B e C não são colineares. CQD.

(b) Pela definição de retas paralelas, duas retas são paralelas se não são concorrentes, ou seja, não existe um mesmo ponto que esteja em ambas. Logo, devemos mostrar que para quaisquer duas retas que escolhermos, haverá um ponto que está em ambas.

Considerando as retas r_1 e r_2, o ponto A está em ambas;
Considerando as retas r_1 e r_3, o ponto A está em ambas;
Considerando as retas r_1 e r_4, o ponto B está em ambas;
Considerando as retas r_1 e r_5, o ponto D está em ambas;
Considerando as retas r_1 e r_6, o ponto D está em ambas;
Considerando as retas r_1 e r_7, o ponto B está em ambas;
Considerando as retas r_2 e r_3, o ponto A está em ambas;
Considerando as retas r_2 e r_4, o ponto F está em ambas;
Considerando as retas r_2 e r_5, o ponto E está em ambas;
Considerando as retas r_2 e r_6, o ponto D está em ambas;
Considerando as retas r_2 e r_7, o ponto E está em ambas;
Considerando as retas r_3 e r_4, o ponto G está em ambas;
Considerando as retas r_3 e r_5, o ponto G está em ambas;
Considerando as retas r_3 e r_6, o ponto C está em ambas;
Considerando as retas r_3 e r_7, o ponto C está em ambas;
Considerando as retas r_4 e r_5, o ponto G está em ambas;
Considerando as retas r_4 e r_6, o ponto F está em ambas;
Considerando as retas r_4 e r_7, o ponto B está em ambas;
Considerando as retas r_5 e r_6, o ponto D está em ambas;
Considerando as retas r_5 e r_7, o ponto E está em ambas;
Considerando as retas r_6 e r_7, o ponto C está em ambas.

Mostramos que todas as retas são duas a duas concorrentes entre si. Portanto, não existem retas paralelas. CQD.

(c) Vamos mostrar que cada ponto pertence a três retas.

O ponto A pertence as retas r_1, r_2 e r_3, e não pertence a nenhuma outra;
O ponto B pertence as retas r_1, r_4 e r_7, e não pertence a nenhuma outra;
O ponto C pertence as retas r_3, r_6 e r_7, e não pertence a nenhuma outra;
O ponto D pertence as retas r_1, r_5 e r_6, e não pertence a nenhuma outra;
O ponto E pertence as retas r_2, r_5 e r_7, e não pertence a nenhuma outra;
O ponto F pertence as retas r_2, r_4 e r_6, e não pertence a nenhuma outra;
O ponto G pertence as retas r_3, r_4 e r_5, e não pertence a nenhuma outra.

Como se esgotaram os casos, provamos que por cada ponto passam três retas. CQD.