

Álgebra Linear

--- Parte 1 ---

Prof. Daniel Emygdio de Faria Filho
fariafilho@usp.br

1

Álgebra Linear

Representação matemática

Equação de atendimento da exigência nutricional (pelo menos uma)
 $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$

Equação de quantidade
 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$

Restrição de não negatividade
 $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

***Pode ser necessário incluir restrições para os ingredientes.**

Onde,
 x_1, x_2, \dots, x_n são os ingredientes e/ou aditivos. Essas são as incógnitas do problema.
 a_1, a_2, \dots, a_n é a composição nutricional associada aos ingredientes e/ou aditivos.
"n" refere-se ao número de ingredientes e/ou aditivos.

b é a exigência nutricional.

2

Álgebra Linear

Os tipos de soluções para **Formulação de Ração**

Solução única

Factivel ($x_1, x_2, \dots, e x_n \geq 0$)
Infactivel (x_1, x_2, \dots ou $x_n < 0$)

Infinitas soluções

Factivel ($x_1, x_2, \dots, e x_n \geq 0$)
Infactivel (x_1, x_2, \dots ou $x_n < 0$)

Sem solução

3

Álgebra Linear

Exercício 1

✓ Considere o milho com 9% de PB na MN e o farelo de soja com 45% de PB na MN. Encontre uma mistura para conter 20% de PB na MN utilizando o **Método da Substituição**.

Representação matemática

$$\begin{cases} 9x_1 + 45x_2 = 20 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \text{ com } x_1 \text{ e } x_2 \geq 0$$

x_1 = milho e x_2 = farelo de soja

4

Álgebra Linear

Exercício 1 – **Substituição**

Representação matemática

$$\begin{cases} 9x_1 + 45x_2 = 20 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \text{ com } x_1 \text{ e } x_2 \geq 0$$

x_1 = milho e x_2 = farelo de soja

Resolução

Encontrar o valor algébrico de x_1 na 2ª equação
 $x_1 = (1 - x_2)$

Substituir o valor algébrico de x_1 na 1ª equação
 $9(1 - x_2) + 45x_2 = 20$

5

Álgebra Linear

Exercício 1 – **Substituição**

Representação matemática

$$\begin{cases} 9x_1 + 45x_2 = 20 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \text{ com } x_1 \text{ e } x_2 \geq 0$$

x_1 = milho e x_2 = farelo de soja

Resolução

Substituir o valor algébrico de x_1 na 1ª equação

$$9(1 - x_2) + 45x_2 = 20$$

$$9 - 9x_2 + 45x_2 = 20$$

$$-9x_2 + 45x_2 = 20 - 9$$

$$36x_2 = 11$$

$$x_2 = \frac{11}{36} = \mathbf{0,305556.}$$

6

Álgebra Linear

Exercício 1 – Substituição

Representação matemática

$$\begin{cases} 9x_1 + 45x_2 = 20 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \text{ com } x_1 \text{ e } x_2 \geq 0$$

$x_1 = \text{milho}$ e $x_2 = \text{farelo de soja}$

Resolução

Substituir o valor numérico de x_2 na 2ª equação

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + 0,305556 &= 1 \\ x_1 &= 1 - 0,305556 = \mathbf{0,694444} \end{aligned}$$

7

Álgebra Linear

Exercício 1 – Substituição

Representação matemática

$$\begin{cases} 9x_1 + 45x_2 = 20 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \text{ com } x_1 \text{ e } x_2 \geq 0$$

$x_1 = \text{milho}$ e $x_2 = \text{farelo de soja}$

Resultado

Milho = 0,694444
Farelo de soja = 0,305556

8

Álgebra Linear

Exercício 1 – Substituição

Representação matemática

$$\begin{cases} 9x_1 + 45x_2 = 20 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \text{ com } x_1 \text{ e } x_2 \geq 0$$

$x_1 = \text{milho}$ e $x_2 = \text{farelo de soja}$

Conferindo

Milho = 0,694444. Farelo de soja = 0,305556

$$\begin{cases} 9(0,694444) + 45(0,305556) = 20 \\ (0,694444) + (0,305556) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20 = 20 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Solução única factível.

9

Álgebra Linear

O Método da Eliminação

Três **Operações Elementares** podem ser aplicadas ao Sistema Linear para obtenção de Sistemas Análogos, com mesmas características do sistema original (inclusive a sua solução), mas tornando-o de mais fácil resolução.

- 1) Troca de posição as equações do sistema;
- 2) Multiplicação de equações do sistema linear por um escalar não nulo; e
- 3) Somar uma equação do sistema à outra, obtendo uma nova equação.

10

Álgebra Linear

Exercício 1

✓ Considere o milho com 9% de PB na MN e o farelo de soja com 45% de PB na MN. Encontre uma mistura para conter 20% de PB na MN utilizando o **Método da Eliminação**.

Representação matemática

$$\begin{cases} 9x_1 + 45x_2 = 20 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \text{ com } x_1 \text{ e } x_2 \geq 0$$

$x_1 = \text{milho}$ e $x_2 = \text{farelo de soja}$

11

Álgebra Linear

Exercício 1 – Eliminação

Resolução

$$\begin{cases} 9x_1 + 45x_2 = 20 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Eliminar x_1 , da 1ª equação. Multiplicar a 2ª equação por -9 e somar à 1ª, gerando uma nova 1ª equação.

$$\begin{cases} 36x_2 = 11 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$x_1 = \text{milho}$ e $x_2 = \text{farelo de soja}$
 $x_1 \text{ e } x_2 \geq 0$

12

Álgebra Linear

Exercício 1 – Eliminação

Resolução

$$\begin{cases} 36x_2 = 11 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Encontrar o valor numérico de x_2 na 1ª equação. Multiplicar a 1ª equação por 1/36, gerando uma nova 1ª equação.

$$\begin{cases} x_2 = 0,305556 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$x_1 = \text{milho}$ e $x_2 = \text{farelo de soja}$
 x_1 e $x_2 \geq 0$

13

Álgebra Linear

Exercício 1 – Eliminação

Resolução

$$\begin{cases} x_2 = 0,305556 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Encontrar o valor numérico de x_1 na 2ª equação. Multiplicar a 1ª equação por -1 e somar com a 2ª equação, gerando a solução do problema.

$$\begin{cases} x_2 = 0,305556 \\ x_1 = 0,694444 \end{cases}$$

Solução única factível.

$x_1 = \text{milho}$ e $x_2 = \text{farelo de soja}$
 x_1 e $x_2 \geq 0$

14

Álgebra Linear

Exercício 2

✓ Considere o farelo de algodão com 33% de PB na MS e a farelo de soja com 51% de PB na MS. Encontre uma mistura para conter 22% de PB na MS.

Representação matemática:

$$\begin{cases} 33x_1 + 51x_2 = 22 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \text{ com } x_1 \text{ e } x_2 \geq 0$$

$x_1 = \text{farelo de algodão}$ e $x_2 = \text{farelo de soja}$

15

Álgebra Linear

Exercício 2

Representação matemática:

$$\begin{cases} 33x_1 + 51x_2 = 22 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Eliminar x_1 na 1ª equação. Multiplicar a 2ª equação por -33 e somar com a 1ª equação gerando nova 1ª equação.

$$\begin{cases} 18x_2 = -11 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$x_1 = \text{farelo de algodão}$ e $x_2 = \text{farelo de soja}$
 x_1 e $x_2 \geq 0$

16

Álgebra Linear

Exercício 2

$$\begin{cases} 18x_2 = -11 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Encontrar o valor numérico de x_2 na 1ª equação. Multiplicar a 1ª equação por 1/18.

$$\begin{cases} x_2 = -0,611111 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$x_1 = \text{farelo de algodão}$ e $x_2 = \text{farelo de soja}$
 x_1 e $x_2 \geq 0$

17

Álgebra Linear

Exercício 2

$$\begin{cases} x_2 = -0,611111 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Encontrar o valor de x_1 na 2ª equação. Multiplicar a 1ª equação por -1 e somar com a 2ª equação, gerando uma nova 2ª equação.

$$\begin{cases} x_2 = -0,611111 \\ x_1 = 1,611111 \end{cases}$$

Solução única Infactível

$x_1 = \text{farelo de algodão}$ e $x_2 = \text{farelo de soja}$
 x_1 e $x_2 \geq 0$

18

Álgebra Linear

Exercício 2

$$\begin{cases} x_2 = -0,611111 \\ x_1 = 1,611111 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x_1 = \text{farelo de algodão e } x_2 = \text{farelo de} \\ \text{soja. } x_1 \text{ e } x_2 \geq 0 \end{array}$$

Conferindo

$$\begin{cases} 33x_1 + 51x_2 = 22 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 33(1,611111) + 51(-0,611111) = 22 \\ (1,611111) + (-0,611111) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 22 = 22 \\ 1 = 1 \end{cases} \quad \text{Solução única Infactível}$$

19

Álgebra Linear

Exercício 3

Considere:

Ingredientes	Proteína bruta (PB; % da MN)
Trigo grão	14
Milho grão	8
Farelo de soja	45

- Mistura energética: 80% de milho com 20% de trigo. O farelo de soja como concentrado proteico.

Pede-se:

Atender a exigência de 20% de proteína bruta utilizando o **Método da Eliminação**.

20

Álgebra Linear

Exercício 3 – Representação matemática

Representação matemática

$$\begin{cases} 14x_1 + 8x_2 + 45x_3 = 20 & \text{Atendimento nutricional} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 & \text{Quantidade} \\ 80x_1 - 20x_2 = 0 & \text{Restrição para ingredientes} \end{cases}$$

$x_1, x_2 \text{ e } x_3 \geq 0$

Relação entre ingredientes

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{20}{80}$$

$$80x_1 = 20x_2$$

$$80x_1 - 20x_2 = 0$$

$x_1 = \text{trigo grão, } x_2 = \text{milho grão,}$
 $x_3 = \text{farelo de soja. } x_1, x_2 \text{ e } x_3 \geq 0.$

21

Álgebra Linear

Exercício 3 – Eliminação

$$\begin{cases} 14x_1 + 8x_2 + 45x_3 = 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 80x_1 - 20x_2 = 0 \end{cases}$$

Facilitar a resolução. Inverter a 1ª equação com a 2ª equação para facilitar a resolução.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 14x_1 + 8x_2 + 45x_3 = 20 \\ 80x_1 - 20x_2 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = \text{trigo grão, } x_2 = \text{milho grão,}$
 $x_3 = \text{farelo de soja. } x_1, x_2 \text{ e } x_3 \geq 0.$

22

Álgebra Linear

Exercício 3 – Eliminação

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 14x_1 + 8x_2 + 45x_3 = 20 \\ 80x_1 - 20x_2 = 0 \end{cases}$$

Eliminar x_1 da 2ª e 3ª equação.

- Multiplicar a 1ª equação por -14 e somar com a 2ª equação para gerar nova 2ª equação.
- Multiplicar a 1ª equação por -80 e somar com a 3ª equação para gerar nova 3ª equação.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -6x_2 + 31x_3 = 6 \\ -100x_2 - 80x_3 = -80 \end{cases}$$

$x_1 = \text{trigo grão, } x_2 = \text{milho grão,}$
 $x_3 = \text{farelo de soja. } x_1, x_2 \text{ e } x_3 \geq 0.$

23

Álgebra Linear

Exercício 3 – Eliminação

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -6x_2 + 31x_3 = 6 \\ -100x_2 - 80x_3 = -80 \end{cases}$$

Melhorar a apresentação.

- Multiplicar a 3ª equação por $-1/100$ e inverter a posição com a 2ª equação.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 0,8x_3 = 0,8 \\ -6x_2 + 31x_3 = 6 \end{cases}$$

$x_1 = \text{trigo grão, } x_2 = \text{milho grão,}$
 $x_3 = \text{farelo de soja. } x_1, x_2 \text{ e } x_3 \geq 0.$

24

Álgebra Linear

Exercício 3 – Eliminação

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 0,8 x_3 = 0,8 \\ -6 x_2 + 31 x_3 = 6 \end{cases}$$

Eliminar x_2 da 3ª equação.

- Multiplicar a 2ª equação por 6 e somar com a 3ª equação gerando nova 3ª equação.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 0,8 x_3 = 0,8 \\ 35,8 x_3 = 10,8 \end{cases}$$

$x_1 =$ trigo grão, $x_2 =$ milho grão,
 $x_3 =$ farelo de soja. x_1, x_2 e $x_3 \geq 0$.

25

Álgebra Linear

Exercício 3 – Eliminação

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 0,8 x_3 = 0,8 \\ 35,8 x_3 = 10,8 \end{cases}$$

Encontrar o valor numérico de x_3 na 3ª equação.

- Multiplicar a 3ª equação por $1/35,8$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 0,8 x_3 = 0,8 \\ x_3 = 0,301676 \end{cases}$$

$x_1 =$ trigo grão, $x_2 =$ milho grão,
 $x_3 =$ farelo de soja. x_1, x_2 e $x_3 \geq 0$.

26

Álgebra Linear

Exercício 3 – Eliminação

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 0,8 x_3 = 0,8 \\ x_3 = 0,301676 \end{cases}$$

Encontrar o valor numérico de x_2 na 2ª equação.

- Substituir o valor numérico de x_3 na 2ª equação.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 0,8 (0,301676) = 0,8 \\ x_3 = 0,301676 \end{cases}$$

$x_1 =$ trigo grão, $x_2 =$ milho grão,
 $x_3 =$ farelo de soja. x_1, x_2 e $x_3 \geq 0$.

27

Álgebra Linear

Exercício 3 – Eliminação

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 = 0,558659 \\ x_3 = 0,301676 \end{cases}$$

Encontrar o valor numérico de x_1 na 1ª equação.

- Substituir o valor numérico de x_2 e x_3 na 1ª equação.

$$\begin{cases} x_1 = 0,139665 \\ x_2 = 0,558659 \\ x_3 = 0,301676 \end{cases} \quad \text{Solução única factível}$$

$x_1 =$ trigo grão, $x_2 =$ milho grão,
 $x_3 =$ farelo de soja. x_1, x_2 e $x_3 \geq 0$.

28

Álgebra Linear

Exercício 3 – Eliminação

Conferindo

$$\begin{cases} 14 x_1 + 8 x_2 + 45 x_3 = 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 80 x_1 - 20 x_2 = 0 \end{cases}$$

$x_1 =$ trigo grão, $x_2 =$ milho grão,
 $x_3 =$ farelo de soja. x_1, x_2 e $x_3 \geq 0$.

$$\begin{cases} 14 (0,139665) + 8 (0,558659) + 45 (0,301676) = 20 \\ (0,139665) + (0,558659) + (0,301676) = 1 \\ 80 (0,139665) - 20 (0,558659) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20 = 20 \\ 1 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

29

Álgebra Linear

Exercício 3 – Eliminação

Verificando a proporção Milho : Trigo

$$\begin{cases} x_1 = 0,139665 \\ x_2 = 0,558659 \\ x_3 = 0,301676 \end{cases}$$

$$x_1 = 0,139665 / (0,139665 + 0,558659) = \mathbf{0,20}$$

$$x_2 = 0,558659 / (0,139665 + 0,558659) = \mathbf{0,80}$$

$x_1 =$ trigo grão, $x_2 =$ milho grão,
 $x_3 =$ farelo de soja. x_1, x_2 e $x_3 \geq 0$.

30

Álgebra Linear

Exercício 4 – Entregar

✓ **Considere:** a exigência 13% de PB e 68% de NDT na MS.

Composição nutricional na matéria seca.

Ingredientes	MS (%)	PB (%)	NDT (%)
Silagem	30	9	52
Milho grão	91	10	85
Farelo de soja	89	51	81

✓ **Pede-se:** a) representação matemática; b) resolução por eliminação; c) a fórmula na matéria natural.

31

Obrigado!

Prof. Daniel Emydio de Faria Filho
fariafilho@usp.br

32