# Modelagem de Redes

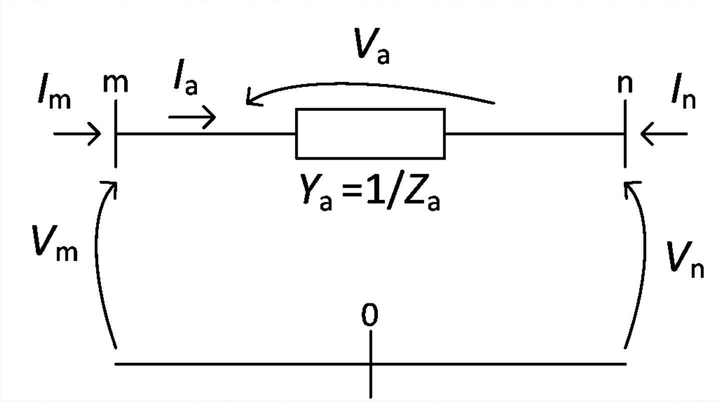
PEA5732 - Modelagem de Componentes de Sistemas Elétricos de Potência para Cálculos Elétricos.

Profs.: Carlos Eduardo de Morais Pereira

Silvio Giuseppe Di Santo

# Matriz de admitâncias

- **Equacionamento**
  - Ramos: Contém somente elementos passivos
  - Nós: Interligam os ramos e onde são inseridas as fontes (corrente ou tensão).




  - Do circuito:

$$V_a = Z_a I_a \quad (1)$$
$$Y_a V_a = I_a \quad (2)$$

  - Onde: $Z_a$ e $Y_a$ são, respectivamente, a impedância e a admitância primitiva.

# Cálculo de Parâmetros

- Aplicando a lei de Kirchhoff nos nós e nos ramos:

$$\begin{bmatrix} I_m \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{array}{c} m \\ n \end{array}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} I_a \qquad\qquad V_a = \begin{array}{cc} m & n \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_m \\ V_n \end{bmatrix}$$

- Substituindo em (2):

$$\begin{array}{c} m \\ n \end{array}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} Y_a \begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} V_m \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \\ I_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} Y_a & -Y_a \\ -Y_a & Y_a \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} V_m \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \\ I_n \end{bmatrix} \qquad (3)$$

- (3) é a equação de admitância nodal do ramo e a matriz de coeficientes é a matriz de admitâncias nodal.
  - A matriz é singular, pois nenhum nó está conectado ao nó de referência.
  - Se o nó *n* fosse conectado ao nó de referência:

$$\begin{array}{cc} & m \\ m & \begin{bmatrix} Y_a \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} V_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \end{bmatrix}$$

# Matriz de admitâncias

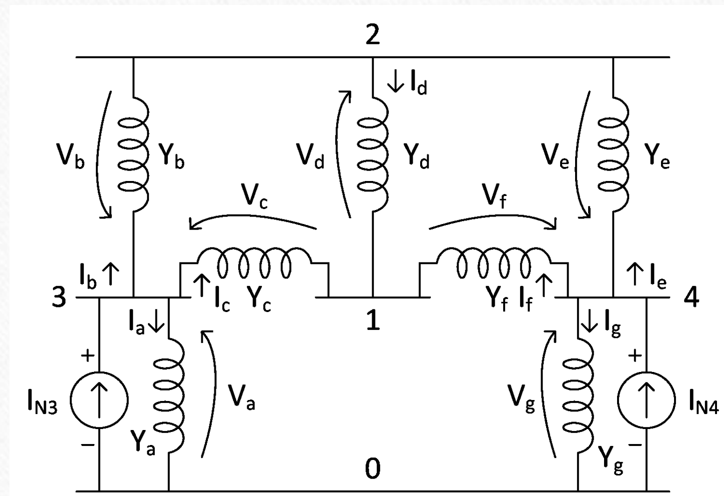
- A matriz de coeficientes relacionando as tensões e correntes dos nós surge devido à multiplicação:

$$\begin{array}{c} \\ m \\ n \end{array}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{array}{cc} m & n \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

- A matriz anterior é chamada de bloco (matriz) de construção, e é importante na representação das redes mais complexas.
- Cada ramo da rede possui uma matriz similar marcada de acordo com os nós da rede aos quais o ramo está conectado.
- Para obter a matriz de admitâncias nodal completa da rede, basta combinar as matriz de cada ramo somando os elementos com linhas e colunas de igual marcação.
- A soma causa o somatório das correntes dos ramos, que fluem de cada nó, a se igualar á corrente total injetada no nó (2ª Lei de Kirchhoff).
- Na matriz geral, os elementos fora da diagonal principal serão o negativo da soma das admitâncias entre dois nós e os elementos da diagonal principal serão a soma das admitâncias conectadas à um nó.

# Matriz de admitâncias

- Exemplo:




- Matriz de coeficientes dos ramos:

$$\begin{array}{cc} & 3 \\ 3 & [1] \end{array} Y_a \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 3 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} Y_b \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 3 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} Y_c \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} Y_d$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 4 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} Y_e \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 4 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} Y_f \qquad \begin{array}{cc} & 4 \\ 4 & [1] \end{array} Y_g$$

# Matriz de admitâncias

- Combinando as matrizes de coeficientes:

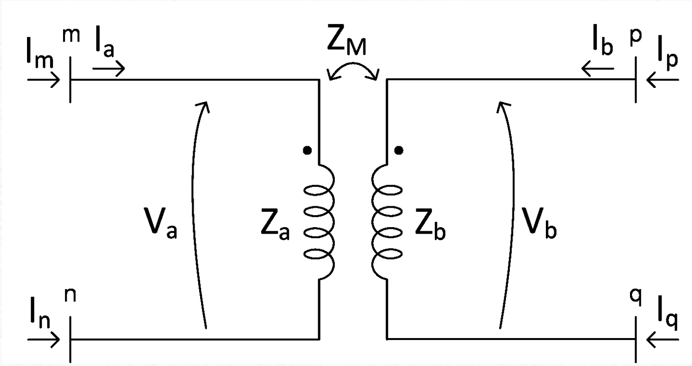
$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & Y_c+Y_d+Y_f & -Y_d & -Y_c & -Y_f \\
2 & -Y_d & Y_b+Y_d+Y_e & -Y_b & -Y_e \\
3 & -Y_c & -Y_b & Y_a+Y_b+Y_c & 0 \\
4 & -Y_f & -Y_e & 0 & Y_e+Y_f+Y_g
\end{array}
$$

- Sistema de equações nodais da rede:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} &
\begin{bmatrix}
Y_c+Y_d+Y_f & -Y_d & -Y_c & -Y_f \\
-Y_d & Y_b+Y_d+Y_e & -Y_b & -Y_e \\
-Y_c & -Y_b & Y_a+Y_b+Y_c & 0 \\
-Y_f & -Y_e & 0 & Y_e+Y_f+Y_g
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{N3} \\ I_{N4} \end{bmatrix}
$$

# Matriz de admitâncias

- Ramos com mútuas




- Equação primitiva (impedância):

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a & Z_M \\ Z_M & Z_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix}$$

- Equação primitiva (admitância):

$$\begin{bmatrix} Z_a & Z_M \\ Z_M & Z_b \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{Z_a Z_b - Z_M{}^2} \begin{bmatrix} Z_b & -Z_M \\ -Z_M & Z_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_a & Y_M \\ Y_M & Y_b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_a & Y_M \\ Y_M & Y_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} \quad (4)$$

# Matriz de admitâncias

- Colocando $V_a$ e $V_b$ em função das tensões nos nós m, n, p e q:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_m - V_n \\ V_p - V_q \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} m & n & p & q \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} V_m \\ V_n \\ V_p \\ V_q \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} V_m \\ V_n \\ V_p \\ V_q \end{bmatrix}$$

- E, para as correntes:

$$\begin{bmatrix} I_m \\ I_n \\ I_p \\ I_q \end{bmatrix} = \begin{array}{c} m \\ n \\ p \\ q \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = [A]^T \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix}$$

- Substituindo em (4):

# Matriz de admitâncias

$$\begin{bmatrix} Y_a & Y_M \\ Y_M & Y_b \end{bmatrix} [A] \begin{bmatrix} V_m \\ V_n \\ V_p \\ V_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix}$$

- Pré-multiplicando por $[A]^T$ e substituindo a equação da corrente:

$$[A]^T \begin{bmatrix} Y_a & Y_M \\ Y_M & Y_b \end{bmatrix} [A] \begin{bmatrix} V_m \\ V_n \\ V_p \\ V_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \\ I_n \\ I_p \\ I_q \end{bmatrix}$$

- Portanto:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} m & n & p & q \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \\ p \\ q \end{array} & \left[\begin{array}{cc|cc} Y_a & -Y_a & Y_M & -Y_M \\ -Y_a & Y_a & -Y_M & Y_M \\ \hline Y_M & -Y_M & Y_b & -Y_b \\ -Y_M & Y_M & -Y_b & Y_b \end{array}\right] \end{array} \begin{bmatrix} V_m \\ V_n \\ V_p \\ V_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \\ I_n \\ I_p \\ I_q \end{bmatrix}$$

# Matriz de admitâncias

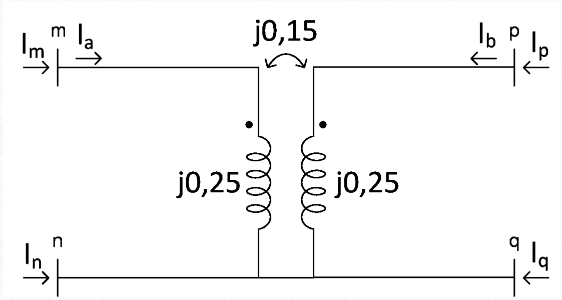
- A matriz nodal dos ramos mútuos pode ser formada por inspeção:

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} Y_a \end{array} & \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} p & q \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} Y_M \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} Y_M \end{array} & \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} p & q \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} Y_b \end{array} \end{array}\right]$$

- Se dois ou mais nós forem os mesmos (curto-circuitados), basta somar as linhas e as colunas correspondentes:
  - Exemplo: $V_n = V_q$ e $I_n$ e $I_q$ são partes da mesma corrente injetada (são somadas).
- Se um dos nós for o nó de referência, basta eliminar a linha e a coluna pertencentes ao nó.
  - Exemplo: nó n é a referência: $V_n = 0$ e $I_n$ não precisa ser representada, pois ela é dependente das outras correntes.

# Matriz de admitâncias

- Exemplo: $Z_a = Z_b = j0{,}25\ \Omega$ e $Z_M = j0{,}15\ \Omega$ e nó n = q (curto-circuitados)




$$\begin{bmatrix} Y_a & Y_M \\ Y_M & Y_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j0{,}25 & -j0{,}15 \\ -j0{,}15 & j0{,}25 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -j6{,}25 & j3{,}75 \\ j3{,}75 & -j6{,}25 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c}
\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} (-j6{,}25) &
\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} p & q \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} (j3{,}75) \\ \hline
\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} (j3{,}75) &
\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} p & q \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} (-j6{,}25)
\end{array}\right]$$

# Matriz de admitâncias

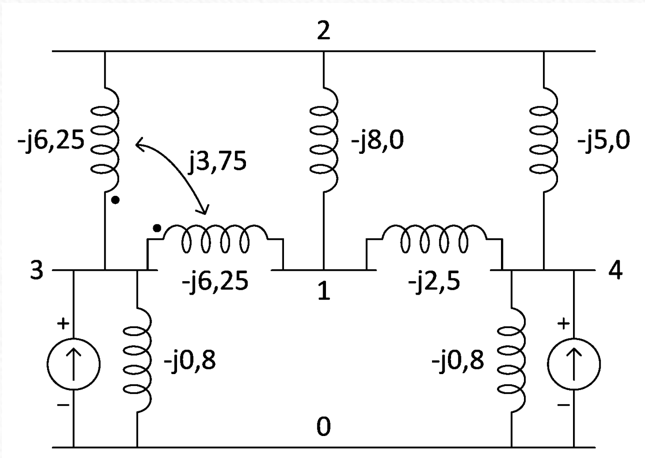
- Como n = q (curto-circuitados), somam-se as linhas e colunas de n com as de q:

$$\begin{array}{c} \\ m \\ p \\ q \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} m & p & q \end{array} \\ \begin{bmatrix} -j6{,}25 & j3{,}75 & j6{,}25-j3{,}75 \\ j3{,}75 & -j6{,}25 & -j3{,}75+j6{,}25 \\ j6{,}25-j3{,}75 & -j3{,}75+j6{,}25 & -2\times j6{,}25+2\times j3{,}75 \end{bmatrix} \end{array}\begin{bmatrix} V_m \\ V_p \\ V_q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_m \\ I_p \\ I_q+I_n \end{bmatrix}$$

- Resumo dos passos:
  - 1) Inverta a matriz de impedâncias primitiva de cada ramo para obter a matriz de admitâncias primitiva; Um ramo simples possui uma matriz 1x1, dois ramos com mútuas possuem uma matriz 2x2 etc;
  - 2) Multiplique os elementos de cada matriz de admitâncias primitiva pela matriz 2x2 de construção;
  - 3) Rotule as duas linhas e duas colunas de cada matriz de construção “diagonal” com os números dos nós das correspondentes admitâncias próprias. No caso de ramos mutuamente acoplados é importante rotular na ordem do nó marcado pelo ponto para o nó sem o ponto;
  - 4) Rotule as duas linhas e as duas colunas da matriz de construção, fora da diagonal, com os números dos nós alinhados e consistentes com os rótulos das linhas e colunas associados em (3).
  - 5) Combine, somando, os elementos que tiverem o mesmo rótulo de linha e coluna para obter a matriz de admitâncias nodal da rede inteira. Se um dos nós é a referência, omita as linhas e colunas associadas à este para obter o sistema matricial da rede.

# Matriz de admitâncias

- **Modificação de $Y_{bus}$**
  - Quando for necessário modificar a matriz $Y_{bus}$ por conta de uma alteração na rede, não há necessidade de montar novamente a matriz do zero.
  - Utilizando os conceitos das matrizes de construção pode-se alterar os elementos da matriz $Y_{bus}$ condizentes com a alteração da rede. Esta modificação é realizada somando-se ou subtraindo-se os elementos com os mesmos rótulos de nó da matriz $Y_{bus}$.
- Exemplo: Retirar o acoplamento mútuo da rede a seguir, dado a sua matriz $Y_{bus}$.




$$Y_{bus} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -j16,75 & j11,75 & j2,50 & j2,50 \\ j11,75 & -j19,25 & j2,50 & j5,00 \\ j2,50 & j2,50 & -j5,80 & 0 \\ j2,50 & j5,00 & 0 & -j8,30 \end{bmatrix} \end{array}$$

# Matriz de admitâncias

- Passo 1: Remover os ramos com acoplamento mútuo, subtraindo de $Y_{bus}$ a seguinte matriz (ver exemplo anterior):

$$\Delta Y_{bus,1} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -j6{,}25 & j3{,}75 & j2{,}50 & . \\ j3{,}75 & -j6{,}25 & j2{,}50 & . \\ j2{,}50 & j2{,}50 & -j5{,}00 & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \end{array}$$

- Passo 2: Somar à $Y_{bus}$ as seguintes matrizes:

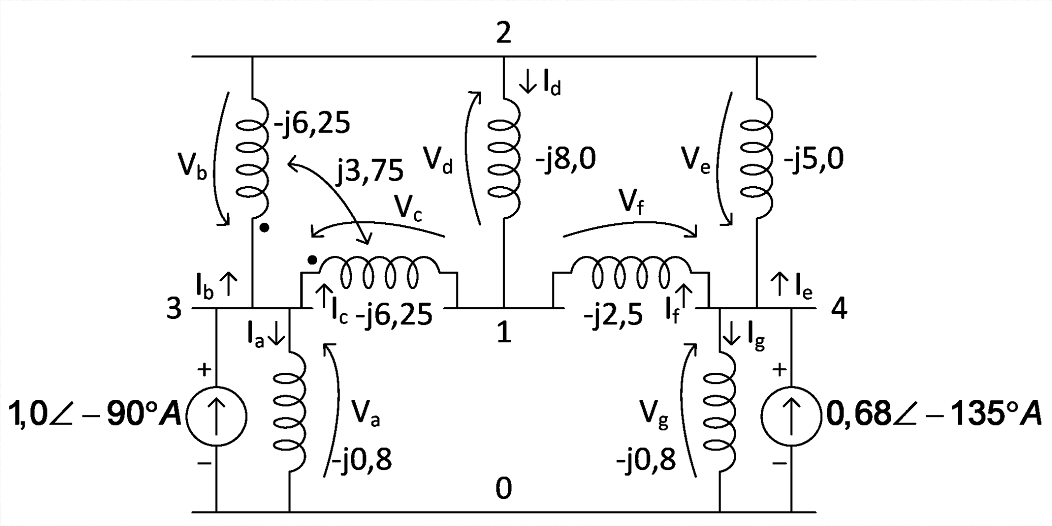
$$\Delta Y_{bus,2} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & . & -1 & . \\ . & . & . & . \\ -1 & . & 1 & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \end{array} (-j4{,}0) \qquad \Delta Y_{bus,3} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} . & . & . & . \\ . & 1 & -1 & . \\ . & -1 & 1 & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \end{array} (-j4{,}0)$$

- Então:

$$Y_{bus,nova} = Y_{bus} - \Delta Y_{bus,1} + \Delta Y_{bus,2} + \Delta Y_{bus,3} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -j14{,}50 & j8{,}00 & j4{,}00 & j2{,}50 \\ j8{,}00 & -j17{,}00 & j4{,}00 & j5{,}00 \\ j4{,}00 & j4{,}00 & -j8{,}80 & 0 \\ j2{,}50 & j5{,}00 & 0 & -j8{,}30 \end{bmatrix} \end{array}$$

# Matriz de admitâncias

- **Matriz de Incidência da Rede e $Y_{bus}$**
  - Até agora as equações nodais dos ramos (ou par de ramos mutuamente acoplados), componentes da rede, foram obtidos separadamente um do outro e, então, combinados em ordem a obter a matriz $Y_{bus}$ completa.
  - Podemos tratar o processo de maneira geral, ou seja, tratar todas as equações do sistema simultaneamente.
  - Procedimento geral:



# Matriz de admitâncias

- 1) Dispor a matriz de admitâncias primitiva de cada ramo (ou junção de ramos, no caso de acoplamento mútuo) dentro de uma matriz primitiva geral:

$$\begin{bmatrix} -j0,80 & . & . & . & . & . & . \\ . & -j6,25 & j3,75 & . & . & . & . \\ . & j3,75 & -j6,25 & . & . & . & . \\ . & . & . & -j8,00 & . & . & . \\ . & . & . & . & -j5,00 & . & . \\ . & . & . & . & . & -j2,50 & . \\ . & . & . & . & . & . & -j0,80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ V_d \\ V_e \\ V_f \\ V_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \\ I_e \\ I_f \\ I_g \end{bmatrix}$$

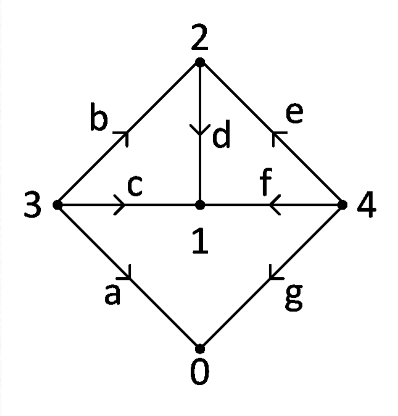
  - Cada ramo contribui com uma entrada na diagonal com valor igual ao inverso (simples) da impedância do ramo, exceto para ramos com acoplamento mútuo.
  - De forma compacta:

$$\left[Y_{pr}\right]\left[V_{pr}\right] = \left[I_{pr}\right] \qquad (5)$$

  - As equações primitivas não informam como os ramos estão conectados na rede.
  - A configuração geométrica dos ramos, topologia, é fornecida por um grafo orientado.

# Matriz de admitâncias

- 2) Construção do grafo:




  - Cada ramo é representado por uma linha direta entre seus nós com uma seta indicando o sentido da corrente.
  - Quando um ramo conecta um nó, o ramo e o nó são ditos ser incidentes.
  - Um grafo pode ser descrito em termos de uma matriz de incidências (ou conexão).
  - A matriz de incidência [*A*] possui uma linha para cada ramo e uma coluna para cada nó. O valor de cada elemento da matriz segue a seguinte regra:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se o ramo } i \text{ não se conecta ao nó } j \\ 1 & \text{se a corrente no ramo } i \text{ é dirigida para fora do nó } j \\ -1 & \text{se a corrente no ramo } i \text{ é dirigida para dentro do nó } j \end{cases}$$

# Matriz de admitâncias

- O nó de referência não é representado na matriz.

$$[A] = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

- A matriz [$A$] possui dimensão R x N, para uma rede com R ramos e N nós (excluindo a referência).

- 3) As tensões nos ramos são, então, relacionadas com as tensões nos nós por:

$$\left[V_{pr}\right] = [A][V] \qquad (6)$$

# Matriz de admitâncias

- Então:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ V_d \\ V_e \\ V_f \\ V_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

- 4) As correntes nos ramos são relacionadas com as correntes injetadas nos nós por:

$$[A]^T \left[I_{pr}\right] = [I] \qquad (7)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \\ I_e \\ I_f \\ I_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}0\angle -90^\circ \\ 0{,}68\angle -135^\circ \end{bmatrix}$$

# Matriz de admitâncias

- Multiplicando (5) por $[A]^T$ e substituindo (6) e (7):

$$[A]^T\left[Y_{pr}\right]\left[V_{pr}\right]=[A]^T\left[I_{pr}\right]$$

$$\left\{[A]^T\left[Y_{pr}\right][A]\right\}[V]=[I]$$

- Então:

$$\left[Y_{bus}\right]=[A]^T\left[Y_{pr}\right][A]$$

- $[Y_{bus}]$ é a matriz de admitâncias nodal da rede e tem dimensão N x N.
- Para a rede dada, as equações nodais em forma matricial será:

$$\begin{bmatrix} -j16{,}75 & j11{,}75 & j2{,}50 & j2{,}50 \\ j11{,}75 & -j19{,}25 & j2{,}50 & j5{,}00 \\ j2{,}50 & j2{,}50 & -j5{,}80 & 0 \\ j2{,}50 & j5{,}00 & 0 & -j8{,}30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}0\angle -90^\circ \\ 0{,}68\angle -135^\circ \end{bmatrix}$$

# Matriz de admitâncias

- **Método da Eliminação Sucessiva (Gauss)**
  - Usado para resolver o sistema de equações nodais sem a necessidade de inverter a matriz de admitâncias da rede.

$$\begin{aligned}
Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + Y_{13}V_3 + Y_{14}V_4 &= I_1 \\
Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + Y_{23}V_3 + Y_{24}V_4 &= I_2 \\
Y_{31}V_1 + Y_{32}V_2 + Y_{33}V_3 + Y_{34}V_4 &= I_3 \\
Y_{41}V_1 + Y_{42}V_2 + Y_{43}V_3 + Y_{44}V_4 &= I_4
\end{aligned}$$

  - O objetivo da eliminação é: reduzir o sistema de quatro equações e quatro variáveis para um sistema de três equações e três variáveis e este para duas equações e duas variáveis até chegar em uma equação e uma variável. Então, conhecido o valor da quarta variável, substituir o valor na equação precedente e encontrar o valor da terceira variável e proceder desta forma até encontrar o valor de todas as variáveis.
  - Eliminação de $V_1$ das equações: divisão da primeira equação por $Y_{11}$ (pivô).

$$V_1 + \frac{Y_{12}}{Y_{11}}V_2 + \frac{Y_{13}}{Y_{11}}V_3 + \frac{Y_{14}}{Y_{11}}V_4 = \frac{1}{Y_{11}}I_1 \qquad (8)$$

# Matriz de admitâncias

- Multiplicando (8) por $Y_{21}$, $Y_{31}$ e $Y_{41}$ e subtraindo o resultado das outras três equações, obtêm-se:

$$\left(Y_{22}-\frac{Y_{21}Y_{12}}{Y_{11}}\right)V_2+\left(Y_{23}-\frac{Y_{21}Y_{13}}{Y_{11}}\right)V_3+\left(Y_{24}-\frac{Y_{21}Y_{14}}{Y_{11}}\right)V_4=I_2-\frac{Y_{21}}{Y_{11}}I_1$$

$$\left(Y_{32}-\frac{Y_{31}Y_{12}}{Y_{11}}\right)V_2+\left(Y_{33}-\frac{Y_{31}Y_{13}}{Y_{11}}\right)V_3+\left(Y_{34}-\frac{Y_{31}Y_{14}}{Y_{11}}\right)V_4=I_3-\frac{Y_{31}}{Y_{11}}I_1$$

$$\left(Y_{42}-\frac{Y_{41}Y_{12}}{Y_{11}}\right)V_2+\left(Y_{43}-\frac{Y_{41}Y_{13}}{Y_{11}}\right)V_3+\left(Y_{44}-\frac{Y_{41}Y_{14}}{Y_{11}}\right)V_4=I_4-\frac{Y_{41}}{Y_{11}}I_1$$

- Observa-se que os coeficientes das equações que irão permanecer são multiplicadas pelo seguinte termo:

$$Y_{jk}^{novo}=Y_{jk}-\frac{Y_{ji}Y_{ik}}{Y_{ii}}$$

- E as correntes serão subtraídas por:

$$-\frac{Y_{ji}}{Y_{ii}}I_i$$

- Onde *i* significa a equação que está sendo eliminada, que no caso acima é a primeira.

# Matriz de admitâncias

- Então, eliminando a segunda equação (do novo sistema): pivô = $Y_{22}^{(1)}$

$$V_1 + \frac{Y_{12}}{Y_{11}}V_2 + \frac{Y_{13}}{Y_{11}}V_3 + \frac{Y_{14}}{Y_{11}}V_4 = \frac{1}{Y_{11}}I_1$$

$$Y_{22}^{(1)}V_2 + Y_{23}^{(1)}V_3 + Y_{24}^{(1)}V_4 = I_2^{(1)}$$

$$Y_{32}^{(1)}V_2 + Y_{33}^{(1)}V_3 + Y_{34}^{(1)}V_4 = I_3^{(1)}$$

$$Y_{42}^{(1)}V_2 + Y_{43}^{(1)}V_3 + Y_{44}^{(1)}V_4 = I_4^{(1)}$$

- Tem-se:

$$\left(Y_{33}^{(1)} - \frac{Y_{32}^{(1)}Y_{23}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}}\right)V_3 + \left(Y_{34}^{(1)} - \frac{Y_{32}^{(1)}Y_{24}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}}\right)V_4 = I_3^{(1)} - \frac{Y_{32}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}}I_2^{(1)}$$

$$\left(Y_{43}^{(1)} - \frac{Y_{42}^{(1)}Y_{23}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}}\right)V_3 + \left(Y_{44}^{(1)} - \frac{Y_{42}^{(1)}Y_{24}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}}\right)V_4 = I_4^{(1)} - \frac{Y_{42}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}}I_2^{(1)}$$

# Matriz de admitâncias

- Eliminando a terceira equação (do novo sistema): pivô = $Y_{33}^{(2)}$

$$V_1 + \frac{Y_{12}}{Y_{11}}V_2 + \frac{Y_{13}}{Y_{11}}V_3 + \frac{Y_{14}}{Y_{11}}V_4 = \frac{1}{Y_{11}}I_1$$

$$V_2 + \frac{Y_{23}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}}V_3 + \frac{Y_{24}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}}V_4 = \frac{1}{Y_{22}^{(1)}}I_2^{(1)}$$

$$Y_{33}^{(2)}V_3 + Y_{34}^{(2)}V_4 = I_3^{(2)}$$

$$Y_{43}^{(2)}V_3 + Y_{44}^{(2)}V_4 = I_4^{(2)}$$

- Tem-se:

$$\left( Y_{44}^{(2)} - \frac{Y_{43}^{(2)}Y_{34}^{(2)}}{Y_{33}^{(2)}} \right) V_4 = I_4^{(2)} - \frac{Y_{43}^{(2)}}{Y_{33}^{(2)}} I_3^{(2)}$$

- Da equação anterior calcula-se $V_4$ e, por substituição nas demais equações, calculam-se as outras tensões: $V_3$ , $V_2$ e $V_1$.

# Matriz de admitâncias

- **Eliminação de nós (Redução de Kron)**
  - Vantagem: redução de uma rede para uma rede menor com as barras de interesse.
  - Processo de eliminação de Gauss mostrou a possibilidade de solucionar o sistema de equações nodais sem precisar inverter a matriz de admitâncias nodal da rede.
  - Por meio desse processo observa-se que ao eliminar uma variável é idêntico à reduzir a rede, uma vez que uma rede equivalente é obtida com a eliminação de um nó em cada passo.
  - Em barras sem injeção de corrente pode-se aplicar a redução de Kron, que simplesmente é a eliminação de Gauss, porém sem alteração das correntes injetadas nas outras barras.
  - Desta forma, basta escolher a barra (ou nó) a ser eliminada e aplicar a expressão a seguir para obter os novos valores das admitâncias das barras remanescentes.

$$Y_{jk}^{novo} = Y_{jk} - \frac{Y_{ji}Y_{ik}}{Y_{ii}}$$

  - Onde o índice *i* indica a barra a ser eliminada.

# Matriz de admitâncias

- Exemplo: Eliminar o nó 2 da rede anterior.

$$\begin{bmatrix} -j16,75 & j11,75 & j2,50 & j2,50 \\ j11,75 & -j19,25 & j2,50 & j5,00 \\ j2,50 & j2,50 & -j5,80 & 0 \\ j2,50 & j5,00 & 0 & -j8,30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,0\angle -90^\circ \\ 0,68\angle -135^\circ \end{bmatrix}$$

- O pivô será $Y_{22}$ = -j19,25.
- Aplicando a expressão anterior na linha 1:

$$Y_{11}^{novo} = Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22}} = -j9,57792$$

$$Y_{13}^{novo} = Y_{13} - \frac{Y_{12}Y_{23}}{Y_{22}} = j4,02597$$

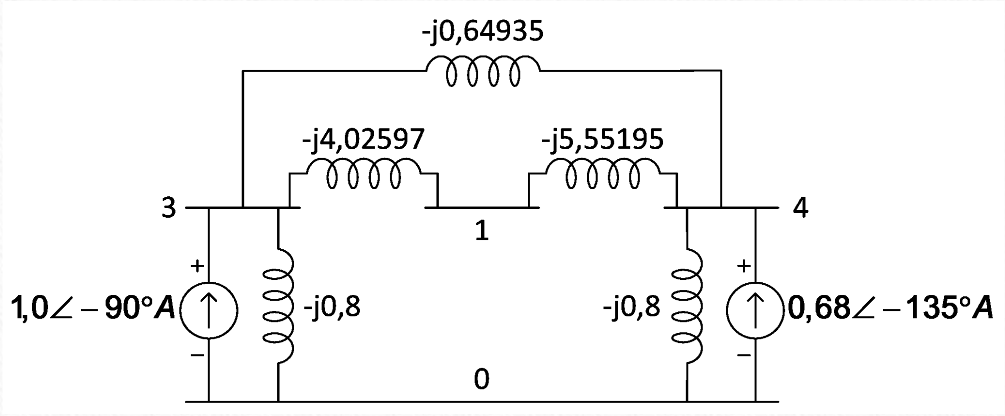
$$Y_{14}^{novo} = Y_{14} - \frac{Y_{12}Y_{24}}{Y_{22}} = j5,55195$$

- Procedendo da mesma forma para as linhas 3 e 4, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} -j9,57791 & j4,02597 & j5,55195 \\ j4,02597 & -j5,47532 & j0,64935 \\ j5,55195 & j0,64935 & -j7,00130 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,0\angle -90^\circ \\ 0,68\angle -135^\circ \end{bmatrix}$$

# Matriz de admitâncias

- Que produz circuito equivalente:




- **Fatoração triangular (LU)**
  - Em estudos práticos, o sistema de admitâncias nodal (de grandes redes) é resolvido sob diversas condições de operação da rede.
  - Muitas vezes os parâmetros e a configuração da rede são fixos e são variadas as injeções das fontes. Desta forma, a matriz $Y_{bus}$ é a mesma e há variação nas correntes injetadas nos nós, variando as tensões nos mesmos.
  - Esforço computacional pode ser evitado se o processo de eliminação de Gauss não tiver de ser repetido.

# Matriz de admitâncias

- A fatoração pode ser feita da seguinte forma:

$$[L]=\begin{bmatrix} Y_{11} & . & . & . \\ Y_{21} & Y_{22}^{(1)} & . & . \\ Y_{31} & Y_{32}^{(1)} & Y_{33}^{(2)} & . \\ Y_{41} & Y_{42}^{(1)} & Y_{43}^{(2)} & Y_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \quad [U]=\begin{bmatrix} 1 & \frac{Y_{12}}{Y_{11}} & \frac{Y_{13}}{Y_{11}} & \frac{Y_{14}}{Y_{11}} \\ . & 1 & \frac{Y_{23}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}} & \frac{Y_{24}^{(1)}}{Y_{22}^{(1)}} \\ . & . & 1 & \frac{Y_{34}^{(2)}}{Y_{33}^{(2)}} \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

- Então:

$$[L][U]=[Y_{bus}]$$

- Os coeficientes da matriz [*L*] são as colunas eliminadas em cada passo da eliminação de Gauss.
- Os coeficientes da matriz [*U*] são os termos remanescentes em cada passo da eliminação de Gauss.

# Matriz de admitâncias

- Realizada a fatoração, o sistema pode ser resolvido da seguinte forma:

$$[Y_{bus}][V] = [I]$$
$$[L][U][V] = [I]$$

- Um passo intermediário é:

$$[L][V]' = [I] \quad \text{e} \quad [U][V] = [V]'$$

- Os sistemas são resolvidos apenas aplicando substituições, não necessitando realizar a inversão das matrizes.

# Matriz de impedâncias

- **Matriz de impedâncias**
  - Pode ser obtida pela inversão da matriz de admitâncias.
  - Porém, quando somente alguns de seus elementos são necessários, é possível obtê-los por meio da matriz de admitâncias, sem a necessidade de invertê-la.
  - Necessário obter as matrizes LU de $Y_{bus}$.
  - O processo de obtenção dos elementos que se deseja da matriz de impedâncias é o seguinte:
  - Multiplica-se $[Z_{bus}]$ por um vetor com valor 1 somente na posição da coluna (ou colunas) a ser extraída:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1m} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2m} & \cdots & Z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{m1} & Z_{m2} & \cdots & Z_{mm} & \cdots & Z_{mN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \cdots & Z_{Nm} & \cdots & Z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1_m \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{1m} \\ Z_{2m} \\ \vdots \\ Z_{mm} \\ \vdots \\ Z_{Nm} \end{bmatrix}$$

# Matriz de impedâncias

- O vetor de impedâncias obtido pode ser escrito como:

$$\left[Z_{bus}^{m}\right]=\begin{bmatrix} Z_{1m} \\ Z_{2m} \\ \vdots \\ Z_{mm} \\ \vdots \\ Z_{Nm} \end{bmatrix}$$

- Sendo o produto da matriz de admitâncias pela matriz de impedâncias igual à matriz identidade:

$$[Y_{bus}][Z_{bus}]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1_m \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}=[Y_{bus}]\left[Z_{bus}^{m}\right]=[L][U]\left[Z_{bus}^{m}\right]=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1_m \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Então, o vetor $\left[Z_{bus}^{m}\right]$ pode ser calculado por simples substituições, como no caso das tensões.

# Matriz de impedâncias

- Exemplo: obter os valores de impedâncias da terceira coluna de $[Z_{bus}]$.

$$\begin{bmatrix} \ell_{11} & . & . & . \\ \ell_{21} & \ell_{22} & . & . \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & . \\ \ell_{41} & \ell_{42} & \ell_{43} & \ell_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ . & 1 & u_{23} & u_{24} \\ . & . & 1 & u_{34} \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{13} \\ Z_{23} \\ Z_{33} \\ Z_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Fazendo:

$$\begin{bmatrix} \ell_{11} & . & . & . \\ \ell_{21} & \ell_{22} & . & . \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & . \\ \ell_{41} & \ell_{42} & \ell_{43} & \ell_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ . & 1 & u_{23} & u_{24} \\ . & . & 1 & u_{34} \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{13} \\ Z_{23} \\ Z_{33} \\ Z_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

- Por substituição: $x_1 = 0$ $\quad x_2 = 0$ $\quad x_3 = 1/\ell_{33}$ $\quad x_4 = -\ell_{43}/(\ell_{44}\ell_{33})$

# Matriz de impedâncias

- Então:

$$
\begin{aligned}
Z_{43} &= x_4 \\
Z_{33} &= x_3 - u_{34}Z_{43} \\
Z_{23} &= x_2 - u_{23}Z_{33} - u_{24}Z_{43} \\
Z_{13} &= x_1 - u_{12}Z_{23} - u_{13}Z_{33} - u_{14}Z_{43}
\end{aligned}
$$

- Impedância vista da barra (ou nó) 3, $Z_{33}$, é a impedância de Thévenin.
- No caso em que se deseja obter a impedância de Thévenin vista entre duas barras (por exemplo 3 e 4), basta realizar o seguinte procedimento:

$$
\begin{bmatrix} \ell_{11} & . & . & . \\ \ell_{21} & \ell_{22} & . & . \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & . \\ \ell_{41} & \ell_{42} & \ell_{43} & \ell_{44} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ . & 1 & u_{23} & u_{24} \\ . & . & 1 & u_{34} \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} Z_{13} - Z_{14} \\ Z_{23} - Z_{24} \\ Z_{33} - Z_{34} \\ Z_{43} - Z_{44} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
$$

# Matriz de impedâncias

- Então:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 1/\ell_{33} \qquad x_4 = -1/\ell_{44} - \ell_{43}/(\ell_{44}\ell_{33})$$

$$Z_{43} - Z_{44} = x_4$$
$$Z_{33} - Z_{34} = x_3 - u_{34}Z_{43}$$
$$Z_{23} - Z_{24} = x_2 - u_{23}Z_{33} - u_{24}Z_{43}$$
$$Z_{13} - Z_{14} = x_1 - u_{12}Z_{23} - u_{13}Z_{33} - u_{14}Z_{43}$$

- Impedância vista entre as barras 3 e 4 será (impedância de Thévenin):

$$Z_{th34} = (Z_{33} - Z_{34}) - (Z_{43} - Z_{44})$$