

# Máquinas elétricas

---

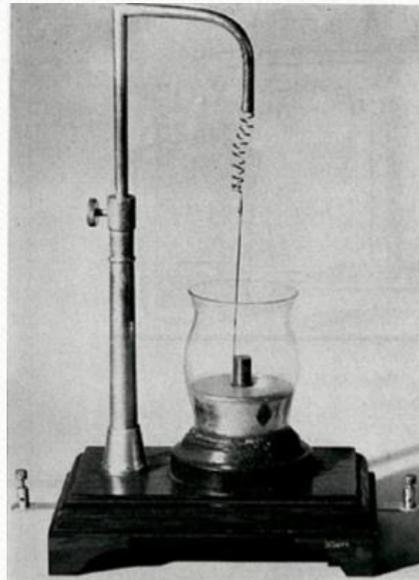
PEA5732 - Modelagem de Componentes de  
Sistemas Elétricos de Potência para Cálculos  
Elétricos.

Profs.: Carlos Eduardo de Moraes Pereira  
Silvio Giuseppe Di Santo

## Um pouco de história

---

- 1800: Alexandre Volta desenvolve a pilha (com placas de prata e zinco);
- 1820: Oersted observa a produção de um campo magnético por uma corrente elétrica, através da deflexão de uma agulha – primeiro movimento mecânico causado por uma corrente elétrica;
- 1821: Faraday constrói um aparato para demonstrar a rotação eletromagnética:

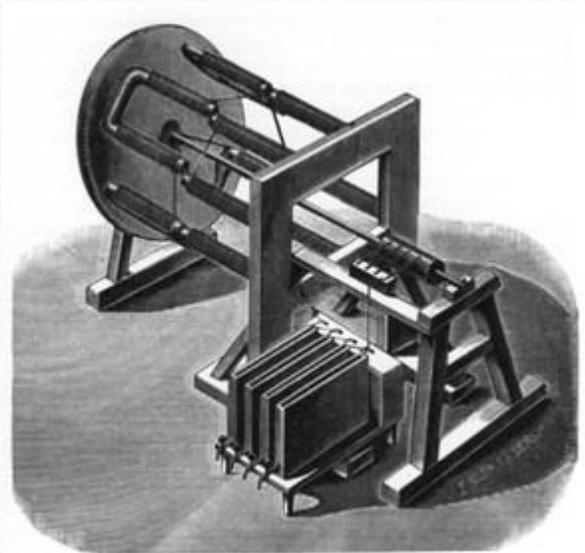


(fonte: Karlsruhe Institute of Technology – <http://www.eti.kit.edu/english/1376.php>)

## Um pouco de história

---

- 1831: Faraday investiga a indução eletromagnética: produção de corrente elétrica à partir da variação de um campo magnético;
- 1832: Invenção teórica da primeira máquina elétrica rotativa (Faraday recebeu uma carta com a invenção de Frederick Mc-Clintock);
- 1834: Jacobi inventa o primeiro motor elétrico:

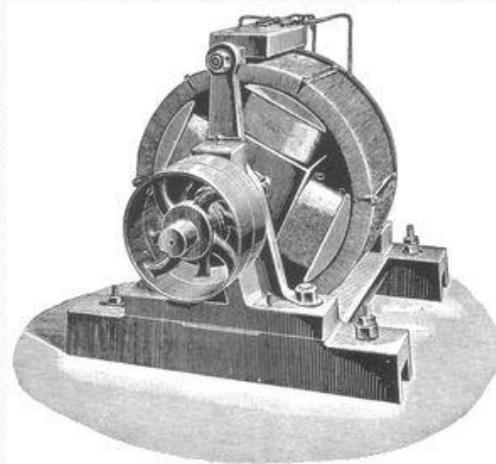


(fonte: Karlsruhe Institute of Technology – <http://www.eti.kit.edu/english/1376.php>)

## Um pouco de história

---

- 1856: Siemens inventa um gerador de corrente contínua pulsada;
- 1871: Gramme inventa o enrolamento em anel e consegue gerar uma tensão CC com menos pulsação;
- 1885: Ferraris constrói o primeiro motor de indução;
- 1888: Haselwander, o primeiro a pensar em utilizar um sistema trifásico, constrói o primeiro gerador síncrono com pólos salientes:

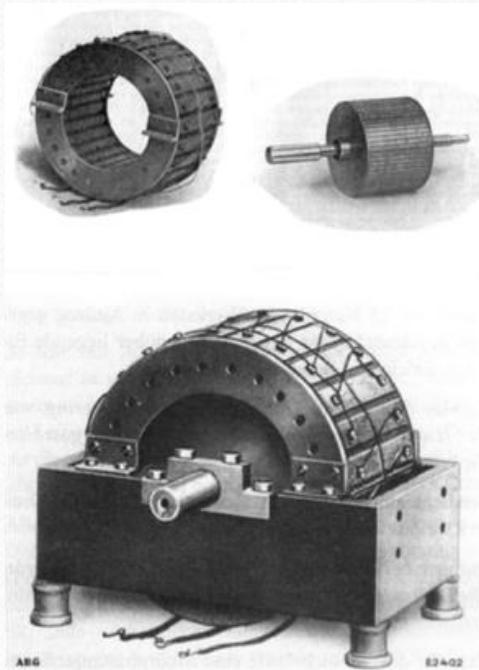


Dr. ing. h. c. Friedrich Aug. Haselwanders Drehstrom-Maschine

(fonte: Karlsruhe Institute of Technology – <http://www.eti.kit.edu/english/1376.php>)

## Um pouco de história

- 1891: Dobrowolsky inventa o motor de indução com rotor gaiola de esquilo, inventou também o motor com anéis deslizantes para inserção de resistência de partida:



(fonte: Karlsruhe Institute of Technology – <http://www.eti.kit.edu/english/1376.php>)

# Gerador Síncrono

---

- **Princípio de funcionamento**

- As bobinas constituem um grupo de circuitos indutivamente acoplados;
- Dentre estes, alguns giram em relação à outros. As indutâncias mútuas são, então, variáveis.
- Duas partes principais:
  - Estacionária: Estator ou armadura.
    - Contém fendas por onde passam as espiras do enrolamento;
    - Carregam a corrente fornecida às cargas.
  - Rotacional: Rotor
    - Comporta a bobina de campo, a qual é alimentada com corrente cc;
    - Pode ser liso ou saliente.
- A força magneto-motriz produzida pela corrente de campo se combina com a  $F_{mm}$  gerada pelas correntes da armadura.
  - O fluxo magnético resultante no gap entre o rotor e o estator gera tensões nas espiras da armadura e produz torque entre o rotor e o estator.

# Gerador Síncrono

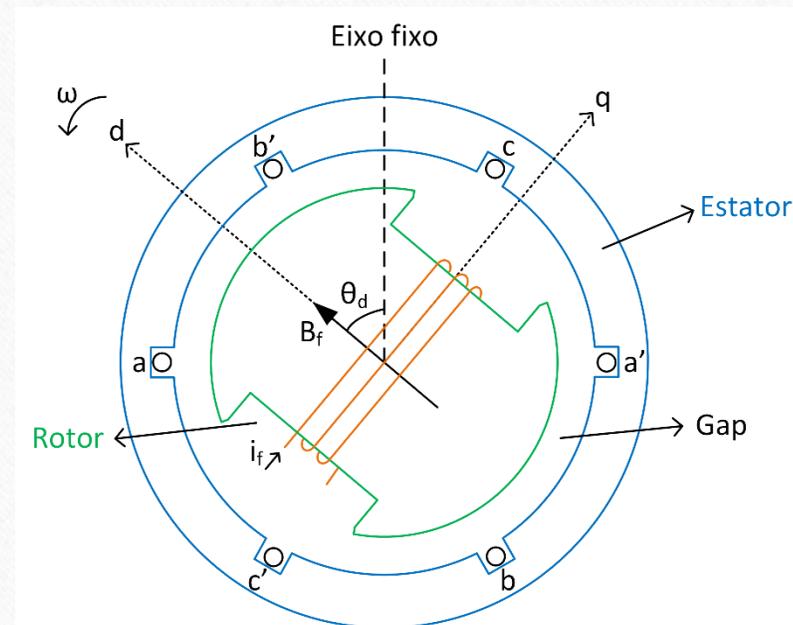
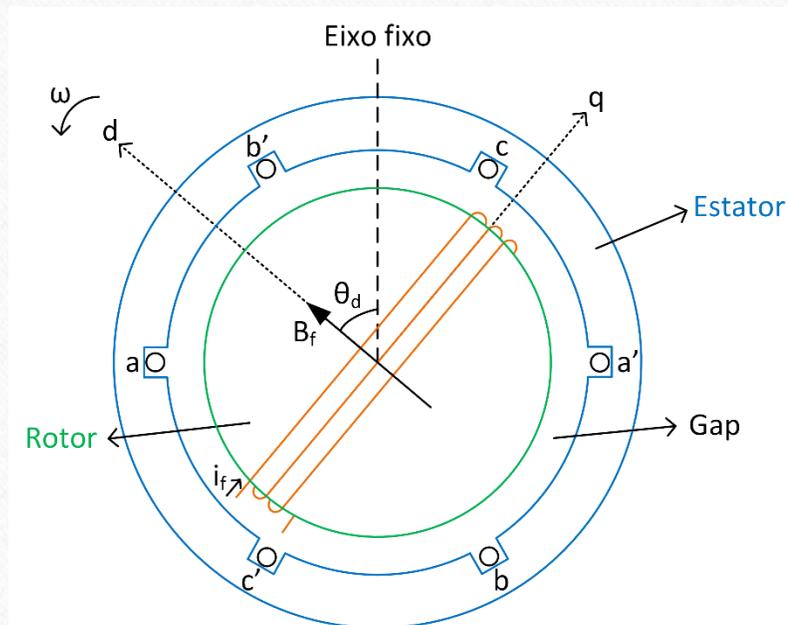
- A corrente de campo é fornecida através de um circuito externo – excitatriz.
  - Pode ser um gerador montado sobre o mesmo eixo;
  - Ou, uma fonte CC separada, conectada à bobina de campo através de escovas e anéis deslizantes.
  - Grandes geradores geralmente possuem excitatrizes consistindo de uma fonte ac e retificadores.
- O gerador síncrono é movido por uma turbina, geralmente hidráulica ou à vapor.



Fonte: Assis, D. Aplicação Gerador Síncrono.  
<http://www.ebah.com.br/content/ABAAAxQKAJ/aplicacao-gerador-sincrono>

# Gerador Síncrono

- Gerador síncrono de pólos lisos e salientes



- Os geradores de pólos salientes geralmente possuem um enrolamento amortecedor (damper winding) localizado no rotor. O amortecedor é constituído por barras de cobre curto-circuitadas, similar ao enrolamento gaiola de esquilo de um motor de indução.
- A função do enrolamento amortecedor é reduzir as oscilações mecânicas do rotor.

# Gerador Síncrono

- Velocidade de rotação

- Máquina de dois pólos: um ciclo de tensão é gerado a cada volta do rotor;
- Máquina de quatro pólos: dois ciclos de tensão são gerados a cada volta do rotor.

$$f_e = \frac{P}{2} \frac{N}{60} = \frac{P}{2} f_m$$

- Onde:

$f_e$ : Frequência elétrica

$P$ : Número de pólos

$N$ : Velocidade do rotor em rotações por minuto

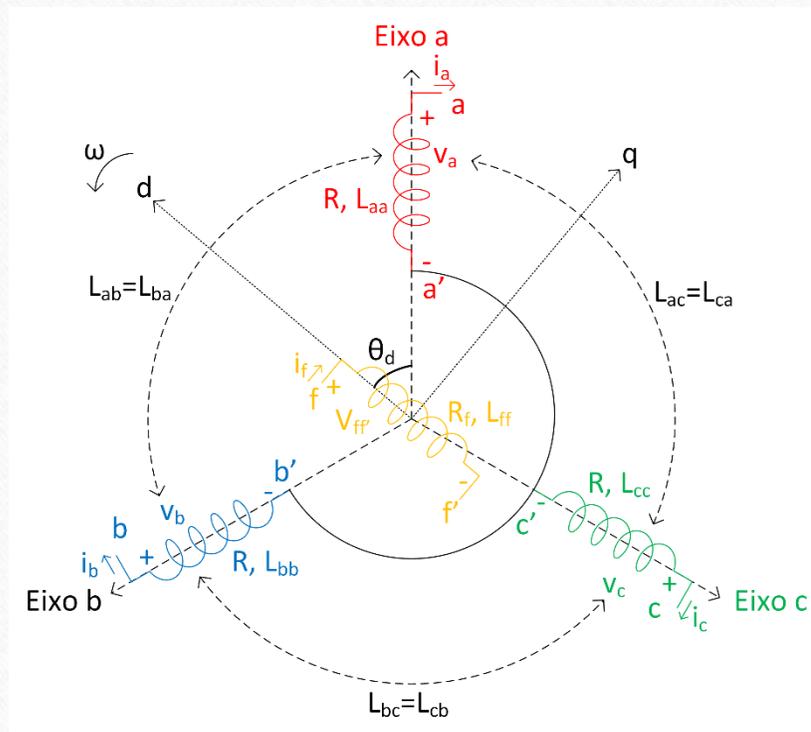
$f_m$ : Frequência mecânica em rotações por segundo

- Ângulo elétrico e mecânico

- Máquina de dois pólos: são iguais;
- Máquina de quatro pólos ou mais: o ângulo elétrico é  $P/2$  vezes o ângulo mecânico.
  - Ex: Para quatro pólos:  $720^\circ$  elétricos são produzidos para cada  $360^\circ$  mecânicos.
- Nas equações é comum utilizar ângulos elétricos ao invés de mecânicos.

# Gerador Síncrono

- Gerador síncrono de pólos lisos



Tem-se que:

- Indutâncias próprias das fases:

$$L_{aa} = L_{bb} = L_{cc} = L_s$$

- Indutâncias mútuas entre fases:

$$L_{ab} = L_{bc} = L_{ca} = -M_s$$

- Indutâncias mútuas entre fases e o campo:

$$L_{af} = M_f \cos \theta_d$$

$$L_{bf} = M_f \cos(\theta_d - 120^\circ)$$

$$L_{cf} = M_f \cos(\theta_d - 240^\circ)$$

- Indutância própria da bobina de campo:  $L_{ff}$

# Gerador Síncrono

- Fluxo concatenado com as bobinas:

- Armadura:

$$\lambda_a = L_{aa}i_a + L_{ab}i_b + L_{ac}i_c + L_{af}i_f = L_s i_a - M_s (i_b + i_c) + L_{af}i_f$$

$$\lambda_b = L_{ba}i_a + L_{bb}i_b + L_{bc}i_c + L_{bf}i_f = L_s i_b - M_s (i_a + i_c) + L_{bf}i_f$$

$$\lambda_c = L_{ca}i_a + L_{cb}i_b + L_{cc}i_c + L_{cf}i_f = L_s i_c - M_s (i_a + i_b) + L_{cf}i_f$$

- Campo:

$$\lambda_f = L_{af}i_a + L_{bf}i_b + L_{cf}i_c + L_{ff}i_f$$

- Considerando as correntes balanceadas:  $i_a + i_b + i_c = 0$

$$\lambda_a = (L_s + M_s)i_a + L_{af}i_f$$

$$\lambda_b = (L_s + M_s)i_b + L_{bf}i_f$$

$$\lambda_c = (L_s + M_s)i_c + L_{cf}i_f$$

- Considerando regime permanente:

$$\frac{d\theta_d}{dt} = \omega$$

$$\theta_d = \omega t + \theta_{d0}$$

$$i_f = I_f$$

# Gerador Síncrono

- Então:

$$\lambda_a = (L_s + M_s) i_a + M_f I_f \cos(\omega t + \theta_{d0})$$

$$\lambda_b = (L_s + M_s) i_b + M_f I_f \cos(\omega t + \theta_{d0} - 120^\circ)$$

$$\lambda_c = (L_s + M_s) i_c + M_f I_f \cos(\omega t + \theta_{d0} - 240^\circ)$$

- A tensão na bobina da fase será:

$$v_a = -Ri_a - \frac{d\lambda_a}{dt} = -Ri_a - (L_s + M_s) \frac{di_a}{dt} + \omega M_f I_f \sin(\omega t + \theta_{d0})$$

- Os sinais negativos se aplicam uma vez que a máquina está sendo considerada um gerador.
- O último termo à esquerda da equação da tensão é a tensão induzida pelo campo:

$$e_a = \sqrt{2} |E_i| \sin(\omega t + \theta_{d0})$$

$$|E_i| = \frac{\omega M_f I_f}{\sqrt{2}}$$

- O ângulo  $\theta_{d0}$  representa o ângulo do eixo "d" em relação ao eixo "a" em  $t=0$ , então, define-se:

$$\delta = \theta_{d0} - 90^\circ \text{ (ângulo do eixo "q")}$$

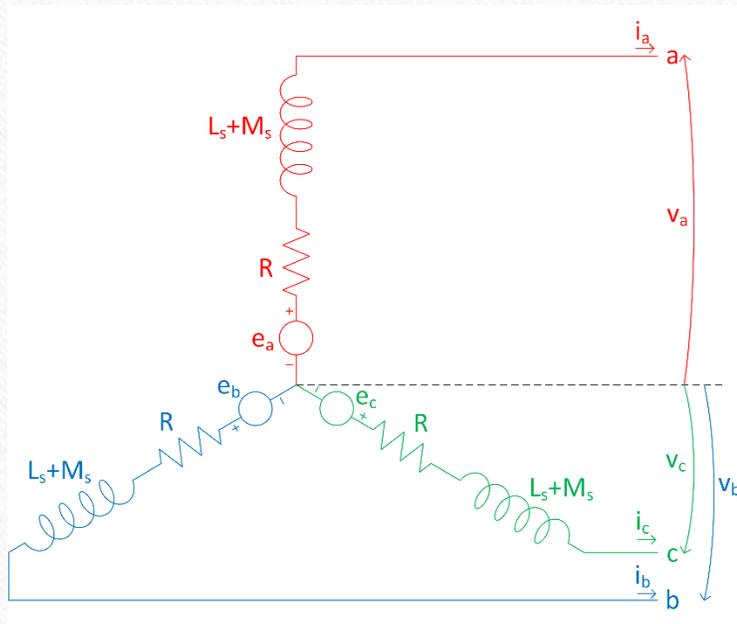
# Gerador Síncrono

- Desta forma:  $\theta_d = \omega t + \theta_{d0} = \omega t + \delta + 90^\circ$

- A tensão nos terminais da fase “a” fica:

$$v_a = -Ri_a - (L_s + M_s) \frac{di_a}{dt} + \sqrt{2} |E_i| \cos(\omega t + \delta)$$

- Para as fases b e c resultados similares podem ser obtidos, porém defasados de  $120^\circ$ .
- Circuito equivalente:



Onde, no caso de regime permanente:

$$Z_d = R + j\omega(L_s + M_s) = R + jX_d$$

é a impedância síncrona da máquina e  $X_d$  é a reatância síncrona.

# Gerador Síncrono

- Gerador síncrono de pólos salientes

- Como em pólos lisos, na armadura:

$$\lambda_a = L_{aa}i_a + L_{ab}i_b + L_{ac}i_c + L_{af}i_f + L_{aD}i_D + L_{aQ}i_Q$$

$$\lambda_b = L_{ba}i_a + L_{bb}i_b + L_{bc}i_c + L_{bf}i_f + L_{bD}i_D + L_{bQ}i_Q$$

$$\lambda_c = L_{ca}i_a + L_{cb}i_b + L_{cc}i_c + L_{cf}i_f + L_{cD}i_D + L_{cQ}i_Q$$

- Porém, as indutâncias próprias e mútuas das fases da armadura são variáveis.

- Desta forma:

- No estator (armadura):

Própria

$$L_{aa} = L_s + L_m \cos 2\theta_d$$

$$L_{bb} = L_s + L_m \cos 2(\theta_d - 120^\circ)$$

$$L_{cc} = L_s + L_m \cos 2(\theta_d + 120^\circ)$$

$$L_s > L_m > 0$$

Mútua

$$L_{ab} = L_{ba} = -M_s - L_m \cos 2(\theta_d + 30^\circ)$$

$$L_{bc} = L_{cb} = -M_s - L_m \cos 2(\theta_d - 90^\circ)$$

$$L_{ca} = L_{ac} = -M_s - L_m \cos 2(\theta_d + 150^\circ)$$

$$M_s > M_m > 0$$

# Gerador Síncrono

- No rotor:

Própria

Bobina de campo:  $L_{ff}$

Bobina amortecedor-D:  $L_D$

Bobina amortecedor-Q:  $L_Q$

Mútua

Campo/D:  $M_r$

Campo/Q: 0

D/Q: 0

- Mútuas entre estator e rotor:

Armadura/Campo:

$$L_{af} = L_{fa} = M_f \cos \theta_d$$

$$L_{bf} = L_{fb} = M_f \cos(\theta_d - 120^\circ)$$

$$L_{cf} = L_{fc} = M_f \cos(\theta_d + 120^\circ)$$

Armadura/Q:

$$L_{aQ} = L_{Qa} = M_Q \sin \theta_d$$

$$L_{bQ} = L_{Qb} = M_Q \sin(\theta_d - 120^\circ)$$

$$L_{cQ} = L_{Qc} = M_Q \sin(\theta_d + 120^\circ)$$

Armadura/D:

$$L_{aD} = L_{Da} = M_D \cos \theta_d$$

$$L_{bD} = L_{Db} = M_D \cos(\theta_d - 120^\circ)$$

$$L_{cD} = L_{Dc} = M_D \cos(\theta_d + 120^\circ)$$

# Gerador Síncrono

- Por serem as indutâncias variáveis, tem-se uma maior facilidade transformando as equações em  $abc$  para  $dq0$  (são três bobinas fictícias defasadas de  $90^\circ$  uma das outras que substituem as bobinas reais).
- Matriz de transformação de Park:

$$[P] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta_d & \cos(\theta_d - 120^\circ) & \cos(\theta_d - 120^\circ) \\ \sin \theta_d & \sin(\theta_d - 120^\circ) & \sin(\theta_d - 120^\circ) \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

- Quando aplicada nas equações de tensão em  $abc$ :

$$v_a = -Ri_a - \frac{d\lambda_a}{dt} \quad v_b = -Ri_b - \frac{d\lambda_b}{dt} \quad v_c = -Ri_c - \frac{d\lambda_c}{dt}$$

- Resulta:

$$\begin{aligned} v_d &= -Ri_d - \frac{d\lambda_d}{dt} - \omega\lambda_q & v_q &= -Ri_q - \frac{d\lambda_q}{dt} + \omega\lambda_d & v_0 &= -Ri_0 - \frac{d\lambda_0}{dt} \\ v_{ff'} &= R_f i_f + \frac{d\lambda_f}{dt} & v_{DD'} &= 0 = R_D i_D + \frac{d\lambda_D}{dt} & v_{QQ'} &= 0 = R_Q i_Q + \frac{d\lambda_Q}{dt} \end{aligned}$$

# Gerador Síncrono

---

- Para os fluxos concatenados:

- Eixo d:

$$\lambda_d = L_d i_d + \sqrt{3/2} M_f i_f + \sqrt{3/2} M_D i_D$$

$$\lambda_f = \sqrt{3/2} M_f i_d + L_{ff} i_f + M_r i_D$$

$$\lambda_D = \sqrt{3/2} M_D i_d + M_r i_f + L_D i_D$$

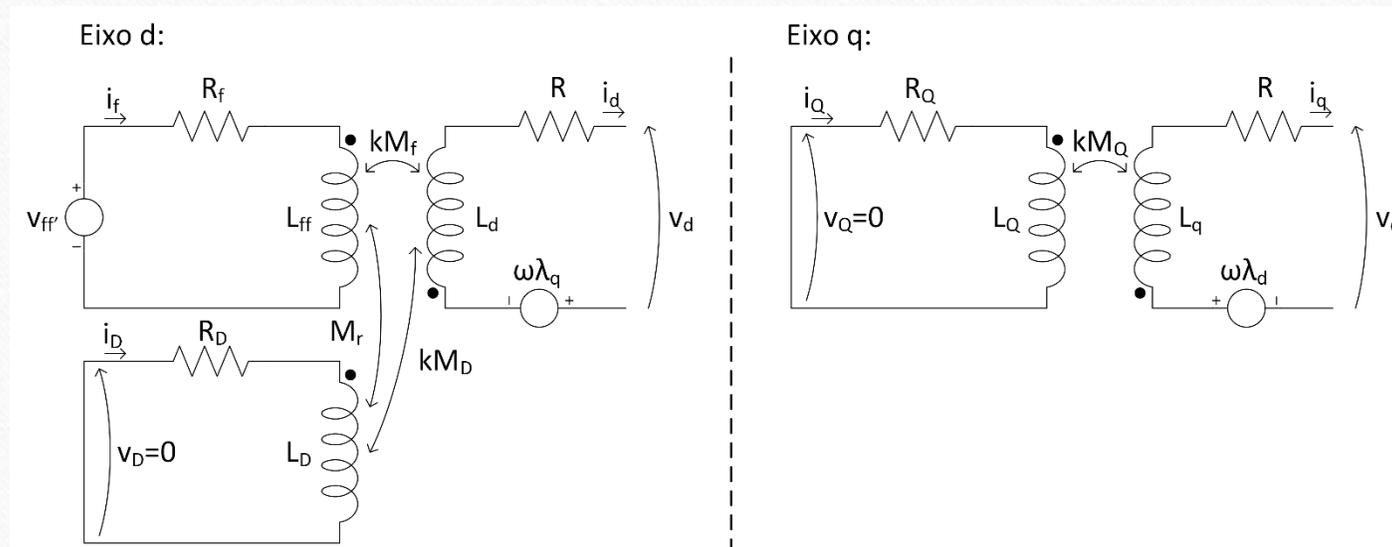
- Eixo q:

$$\lambda_q = L_q i_q + \sqrt{3/2} M_Q i_Q$$

$$\lambda_Q = \sqrt{3/2} M_Q i_q + L_Q i_Q$$

# Gerador Síncrono

- Circuito equivalente em  $dq0$ :



- Através dos ensaios de curto-circuito e circuito aberto do gerador, determinam-se os seguintes parâmetros utilizados em regime transitório do gerador:

# Gerador Síncrono

- Parâmetros transitórios (ensaio de curto-circuito):

$X_d''$ : Reatância subtransitória do eixo d.

$X_d'$ : Reatância transitória do eixo d.

$X_q''$ : Reatância subtransitória do eixo q.

$X_q'$ : Reatância transitória do eixo q.

$T_d''$ : Constante de tempo subtransitória do eixo d.

$T_d'$ : Constante de tempo transitória do eixo d.

$T_q''$ : Constante de tempo subtransitória do eixo q.

$T_q'$ : Constante de tempo transitória do eixo q.

- Ainda pode-se utilizar as constantes de tempo do ensaio de circuito aberto, que podem ser obtidas à partir dos parâmetros obtidos do ensaio de curto-circuito. (aproximação).

$$T_{do}' = T_d' \frac{X_d}{X_d'} \quad T_{do}'' = T_d'' \frac{X_d'}{X_d''}$$

# Gerador Síncrono

- O período subtransitório começa no momento do curto-circuito e acaba quando a corrente no amortecedor torna-se pequena, dando início ao período transitório que tem fim quando a corrente de curto-circuito se estabiliza em seu valor de regime.
- As reatâncias aumentam de valor em cada período, sendo:

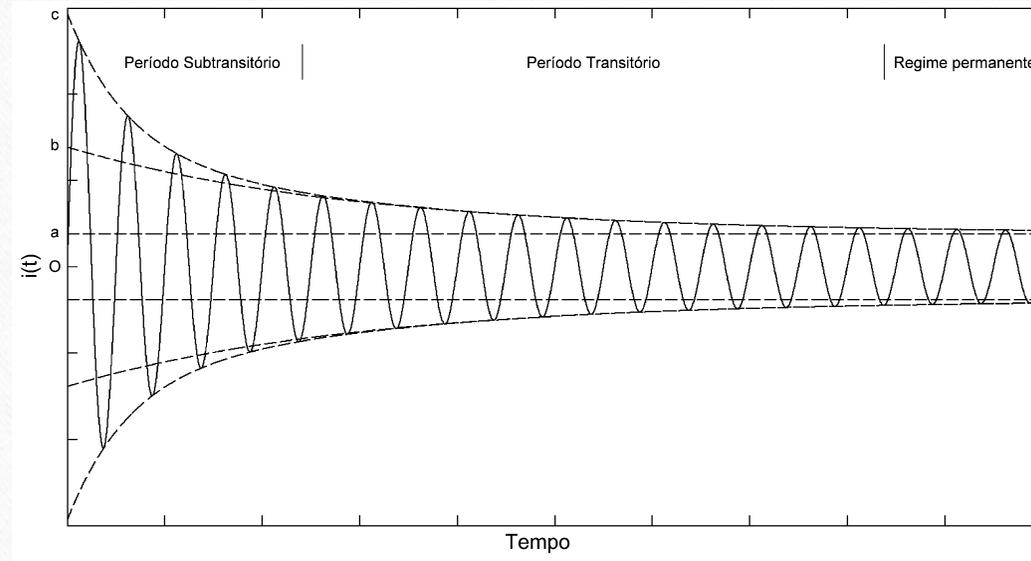
$$X_d'' < X_d' < X_d$$
$$X_q'' < X_q = X_q'$$

- Para um curto-circuito trifásico, a corrente nas fases, retirando a parcela dc, podem ser calculadas da seguinte forma:

$$I(t) = \frac{e_i}{X_d} + e_i \left( \frac{1}{X_d'} - \frac{1}{X_d} \right) \varepsilon^{-t/T_d'} + e_i \left( \frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_d'} \right) \varepsilon^{-t/T_d''}$$
$$e_i = \sqrt{2} |E_i| \cos \omega t$$

# Gerador Síncrono

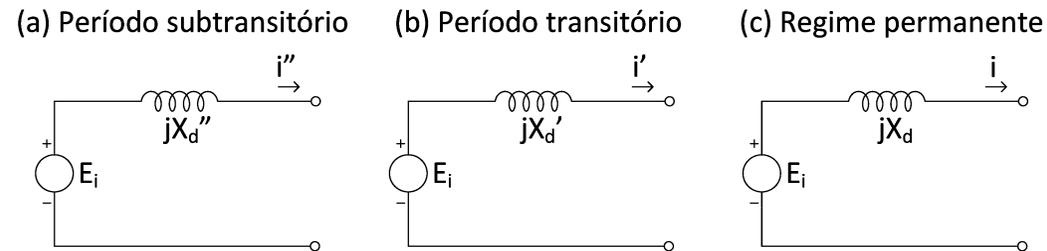
- Forma de onda da corrente de curto-circuito:



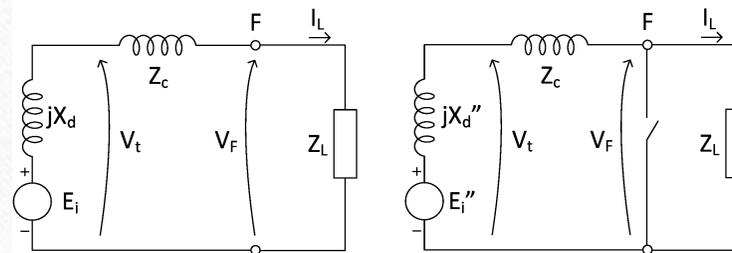
- Corrente em regime permanente:  $|I| = \frac{0 - a}{\sqrt{2}} = \frac{|E_i|}{X_d}$
- Corrente transitória:  $|I'| = \frac{0 - b}{\sqrt{2}} = \frac{|E_i|}{X_d'}$
- Corrente subtransitória:  $|I''| = \frac{0 - c}{\sqrt{2}} = \frac{|E_i|}{X_d''}$

# Gerador Síncrono

- Circuitos equivalentes para cada período (gerador sem carga):



- Circuitos equivalentes para cada período (gerador com carga): Neste caso a tensão interna dos circuitos (a) e (b) deverá ser ajustada para que a tensão no ponto da falta (tensão de Thévenin) continue a mesma após a substituição da reatância.



# Gerador Síncrono

- Do circuito, tem-se que garantir que  $V_F$  e  $I_L$  continuem com os mesmos valores após a substituição de  $X_d$  por  $X_d''$  ou  $X_d'$ .

- Desta forma:

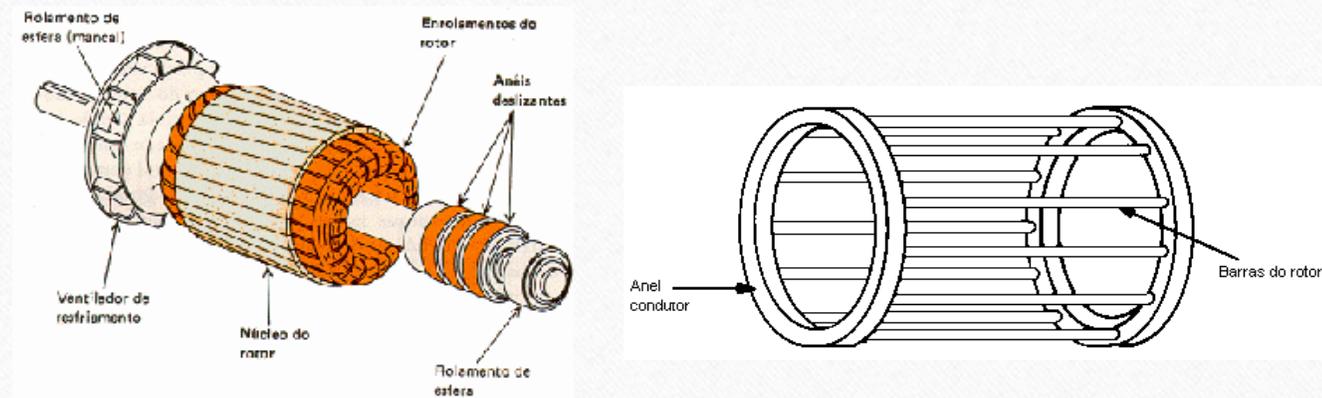
$$E_i'' = V_t + jX_d'' I_L = V_F + (Z_c + jX_d'') I_L$$

$$E_i' = V_t + jX_d' I_L = V_F + (Z_c + jX_d') I_L$$

- Então, em carga, sempre deve ser ajustada a tensão interna do circuito equivalente do aerogerador no cálculo da corrente de curto-circuito.
- No caso de carga e curto-circuito desequilibrado deve-se utilizar componentes simétricas:
  - Gerador de pólos lisos:  $X_1 = X_2 = X_d'' \neq X_0$
  - Gerador de pólos salientes (em geral):  $X_1 = X_d'' \neq X_2 \neq X_0$

# Motores de indução

- A construção do estator é igual ao do gerador síncrono, porém o rotor não contém um campo de excitação próprio. O campo produzido pelo rotor é criado pela corrente induzida nos condutores do mesmo pelo campo da armadura.
- O rotor pode ser construído de duas maneiras:
  - Com barras espaçadas em sua periferia e curto-circuitadas (Gaiola de esquilo);
  - Bobinado. Com enrolamento trifásico ligado em Y.
    - Utiliza anéis deslizantes que curto-circuitam as saídas das bobinas.
    - Tem como vantagem, possibilitar a inclusão de impedâncias em série com os bobinas do rotor cujo principal objetivo é de alterar a característica de partida da máquina.



Fonte (figuras): Augusto Jr. & Amorim Filho: Motores Trifásicos de Indução.  
<http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAdsYAK/motores-inducao>

# Motores de indução

- No motor de indução deve haver sempre uma diferença entre a velocidade do campo e a velocidade do rotor: para que o campo no rotor seja criado.

- Velocidade síncrona:

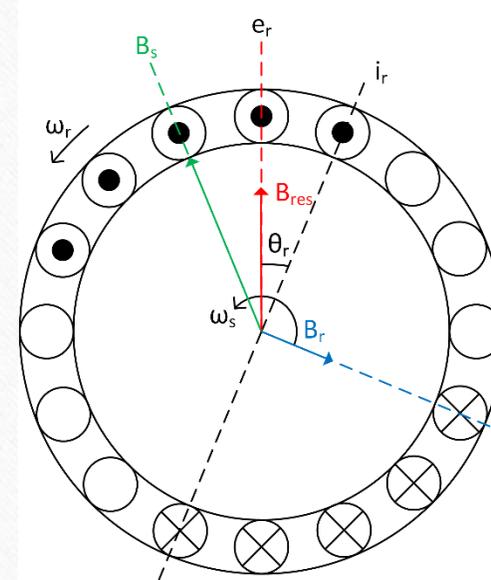
$$n_s = \frac{120f_e}{P}$$

- Escorregamento:

$$s = \frac{n_s - n_r}{n_s} (\times 100\%) = \frac{\omega_s - \omega_r}{\omega_s} (\times 100\%)$$

- Frequência elétrica no rotor:

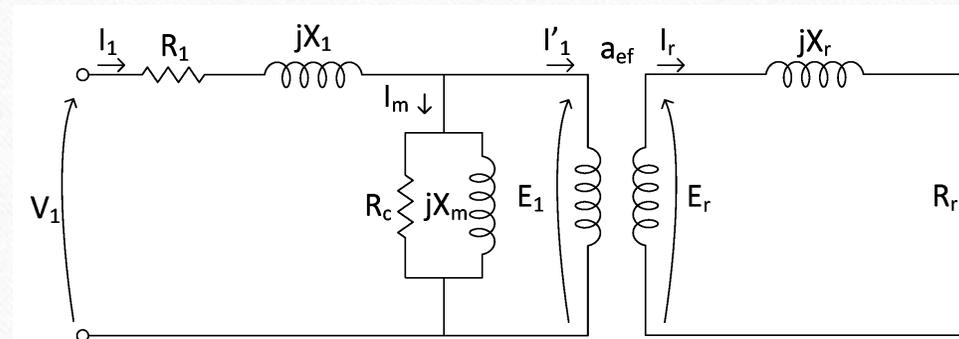
$$f_r = sf_e \quad \text{ou} \quad f_r = \frac{P}{120} (n_s - n_r)$$



# Motores de indução

- Circuito equivalente

- O circuito equivalente de um motor de indução é parecido com o circuito equivalente de um transformador, uma vez que uma tensão (e uma corrente) são induzidas no rotor pelo estator.
- Porém, a frequência da tensão e da corrente induzidas no rotor serão variáveis, dependendo do escorregamento.

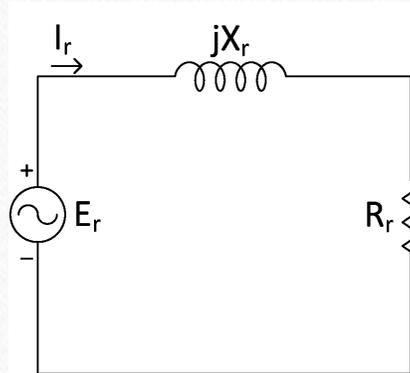


- Onde:

- $R_1$  e  $X_1$  são, respectivamente, a resistência e a reatância de dispersão da armadura;
- $R_c$  e  $X_m$  são, respectivamente, a resistência (perda no núcleo) e a reatância magnetizante;
- $R_r$  e  $X_r$  são, respectivamente, a resistência e a reatância de dispersão do rotor;
- $a_{ef}$  é a relação de espiras efetiva entre o estator e o rotor.

# Motores de indução

- A tensão  $E_1$  impõe um fluxo no gap do motor e é acoplado à tensão secundária  $E_r$  através da relação  $a_{ef}$ ;
- $E_r$  produz um fluxo de corrente,  $I_r$ , no rotor (que se encontra curto-circuitado);
- $E_r$  e  $I_r$  possuem frequência dependente do escorregamento entre o estator e o rotor. Desta forma, o circuito equivalente do rotor deve ser modificado, com o objetivo de se trabalhar com tensões e correntes na frequência de alimentação da armadura.
- Modificação do circuito equivalente do rotor:



- Condições de fronteira:
  - Rotor bloqueado:  $s = 1$  e  $f_r = f_e$  e  $E_r = E_{r0}$
  - Rotor na velocidade síncrona:  $s = 0$  e  $f_r = 0$  e  $E_r = 0$

# Motores de indução

- Então:

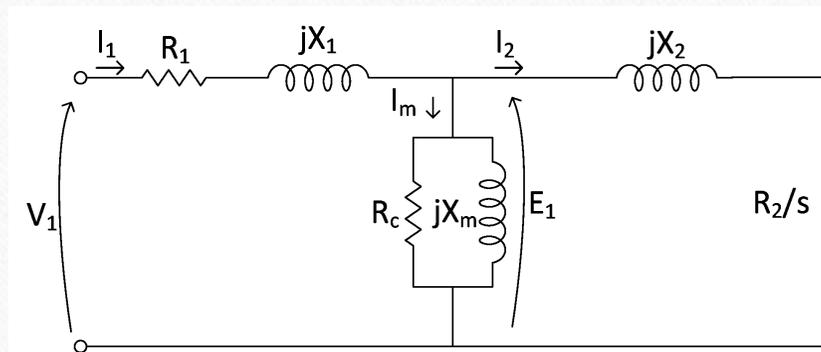
$$E_r = sE_{r0}$$

$$X_r = \omega_r L_r = 2\pi f_r L_r = 2\pi s f_e L_r = sX_{r0}$$

- A corrente no rotor será:

$$I_r = \frac{E_r}{R_r + jX_r} = \frac{E_{r0}}{R_r/s + jX_{r0}}$$

- Modificando o circuito equivalente do rotor e referindo ao estator:



- No caso de inclusão de resistências em série com o rotor (bobinado), basta somar a resistência inserida com  $R_2$ .