A INTEGRAL DE RIEMANN EM TRÊS VARIÁVEIS

1. Integral em paralelepípedos

2. Integral em domínios limitados do espaço

3. Integrais iteradas e o Teorema de Fubini

Como no caso de duas variáveis, a ferramenta principal para o cálculo de integrais triplas é reduzi-las ao cálculo de integrais de uma variável denominado *integração iterada.*

3.1. **Teorema de Fubini em paralelepípedos.** Seja $\mathcal{W} = [a, b]\times [c, d] \times [d, e]$ um paralelepípedo compacto em R^3. Observe que $\mathcal{W} = \mathcal{R}\times[e, f]$, sendo $\mathcal{R} = [a, b]\times[c, d]$ um retângulo em $\mathbb{R}^2$. Se $f : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua (por simplicidade), podemos definir, para cada $(x, y) \in \mathcal{R}$ a função **de uma variável** $f_{xy}(z) = f(x, y, z)$. Por integração simples, obtemos a função de **duas variáveis**, $\psi(x, y) := \int_e^f f_{xy}(z)\, d\, z$. A integral

$$\int_{\mathcal{R}} \psi(x, y)\, d\, x\, d\, y = \int_{\mathcal{R}} \left(\int_e^f f_{xy}(z)\, d\, z \right).$$

é chamada **integral iterada**. Usando o Teorema de Fubini para integrais duplas, podemos transformar o cálculo da integral e $\mathcal{R}$ em uma integração iterada. O Teorema de Fubini afirma que o valor dessa integral é exatamente o valor da Integral tripla em $\mathcal{W}$.

Teorema 3.1. *(Teorema de Fubini para paralelepípedos) Suponhamos que $f : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ seja uma função contínua no paralelepípedo*

Date: September 11, 2023.

$\mathcal{W} = \mathcal{R} \times [e, f] = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ *e*

$$I = \iiint_{\mathcal{W}} f(x, y, z)\, d\,x\, d\,y\, d\,z.$$

Então temos

$$I = \int_{\mathcal{R}} \psi(x, y)\, d\,x\, d\,y = \int_{\mathcal{R}} \left(\int_e^f f_{xy}(z)\, d\,z \right)$$
$$= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x, y, z)\, d\,z \right) d\,y \right) d\,x.$$

Observação 3.2.

- *O resultado ainda vale se supusermos apenas que f é integrável em $\mathcal{W}$. Nesse caso, porém, a função $\psi(x, y)$ estará definida exceto em um conjunto de conteúdo nulo (onde precisa ser definida de alguma maneira de modo a ficar limitada).*
- *Como no caso de duas variáveis, há várias ordens possíveis para a integral iterada (de fato, aqui há 6 possibilidades). Por exemplo, $I = \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y, z)\, d\,x \right) d\,y \right) d\,z$, etc.*

Exemplo 3.3. *Calcule a integral $\iint_{\mathcal{W}} 2xy + z^2 dxdy$, sendo $\mathcal{W} = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 0\}$.*

3.2. **O Teorema de Fubini em domínios mais gerais.** O Teorema de Fubini pode ser estendido para domínios mais gerais. em particular, para domínios do tipo I, II e III, cujas definições lembramos aqui por conveniência:

- **Domínios do tipo I** - $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_{xy} \in \mathbb{R}^2, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$, sendo $D_{xy} \in \mathbb{R}^2$ conjunto compacto, $\alpha(x, y)$ e $\beta(x, y)$ funções contínuas.

- **Domínios do tipo II** - $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in D_{xz} \in \mathbb{R}^2, \alpha(x, z) \leq y \leq \beta(x, z)\}$, sendo $D_{xz} \in \mathbb{R}^2$ conjunto compacto, $\alpha(x, z)$ e $\beta(x, z)$ funções contínuas.
- **Domínios do tipo III** - $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D_{yz} \in \mathbb{R}^2, \alpha(y, z) \leq x \leq \beta(y, z)\}$, sendo $D_{yz} \in \mathbb{R}^2$ conjunto compacto, $\alpha(y, z)$ e $\beta(y, z)$ funções contínuas.

Teorema 3.4. *Seja D um domínio do tipo I e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então temos*

$$\iiint_D f(x, y, z)\, d\,x\, d\,y\, d\,z = \iint_{D_{x,y}} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)\, d\,z \right) d\,x\, d\,y.$$

Observação 3.5.

- *Resultado análogo vale para domínios do tipo I e II e também, em vista da Prop. 3.8, para domínios que possam ser divididos em domínios desses tipos.*
- *O resultado ainda vale se supusermos apenas que f é integrável em $\mathcal{W}$. Nesse caso, porém, a função $\psi(x, y)$ estará definida exceto em um conjunto de conteúdo nulo (onde precisa ser definida de alguma maneira de modo a ficar limitada).*

Exemplos 3.6. *Calcule as integrais triplas:*

(1) $\iiint_D yz\, dxdydz$, *onde* $D = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2z,\ 0 \leq x \leq z + 2\}$ *(Resp: $\frac{7}{5}$.)*
(2) $\iiint_D y\, dxdydz$, *onde D é a região abaixo do plano $z = x + 2y$ e acima da região no plano xy limitada pelas curvas $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 1$ (Resp: $\frac{5}{28}$.) item* $\iiint_D xy\, dxdydz$, *onde D é o tetraedro sólido com vértices* $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ *e* $(0, 0, 3)$. *(Resp: $\frac{1}{10}$.)*

(3) $\iiint_D x\, dxdydz$, *onde* D *é limitada pelo parabolóide* $x = 4y^2 + 4z^2$ *e pelo plano* $x = 4$. *(Resp:* $\frac{16\pi}{3}$*.)*

(4) $\iiint_E (x^2+y^2)\, dxdydz$, *onde* E *é a região limitada pelo cilindro* $x^2 + y^2 = 4$ *e pelos planos* $z = -1$ *e* $z = 2$. *(Resp:* 24π*.)*

(5) $\iiint_E y\, dxdydz$, *onde* E *é a região entre os cilindros* $x^2+y^2 = 4$ *e* $x^2 + y^2 = 1$, *limitada pelo plano* xy *e pelo plano* $z = x + 2$ *(Resp:* 0*.)*

(6) $\iiint_E x^2\, dxdydz$, *onde* E *é o sólido limitado pelo cilindro* $x^2 + y^2 = 1$, *pelo cone* $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ *e contido no semiespaço* $z \geq 0$. *(Resp:* $\frac{2\pi}{5}$*.)*