UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos

ZAB1111 – Estatística Básica

Aula 7 – PROBABILIDADE (1)

Definições iniciais + Operações com eventos + Probabilidade condicional + Teorema de Bayes

Material preparado pelo Prof. Dr. César Gonçalves de Lima – FZEA/USP

4. PROBABILIDADE

Fenômeno aleatório é todo acontecimento ou situação, cujos resultados não podem ser previstos com certeza.

Até agora descrevemos as principais características de variáveis associadas a fenômenos aleatórios com o objetivo de entendê-los melhor.

Utilizamos: Gráficos, tabelas e distribuições de frequências; medidas de tendência central, de dispersão, de assimetria e de achatamento.

A partir de agora: Vamos associar à distribuição de frequências dos dados observados do fenômeno um **modelo teórico** que reproduza bem esses dados e possibilite quantificar incertezas.

Historicamente, a **probabilidade** esteve associada a jogos de azar, ao cálculo de seguros de cargas (fenícios no século XVII) *etc*.

Características de um jogo de azar:

$$incerteza \text{ e } regularidade$$

Consigo encontrar uma fórmula para ganhar sempre?

4.1. Definições iniciais

ESPAÇO AMOSTRAL é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento/fenômeno aleatório. **Notação**: $\boldsymbol{S}$ ou $\boldsymbol{\Omega}$ (Omega).

Exemplos:

$a)$ Altura dos alunos da FZEA $\Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1{,}40 \leq x \leq 2{,}10\}$

$b)$ Face superior de um dado não viciado $\Rightarrow S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

EVENTO é qualquer subconjunto do espaço amostral, $\boldsymbol{\Omega}$..

Exemplos:

$A =$ "altura dos alunos da turma 2020 de Biossistemas" $\Rightarrow EB = \{x \in \mathbb{R} \mid 1{,}40 \leq x \leq 1{,}8\}$

$B =$ "a face superior do dado é um número primo" $\Rightarrow B = \{2, 3, 5\}$

Nota: Primo é todo número natural que é divisível por 1, por ele mesmo e é maior ou igual a 2.

Notação ideal: o evento é nomeado por uma letra maiúscula e os seus elementos, por letras minúsculas. **Exemplo**: $\mathrm{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Exemplo: O experimento aleatório envolvendo o lançamento de um dado tem um espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Alguns eventos:

A: a face superior é um número par $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\}$

B: a face superior é um número primo $\Rightarrow B = \{2, 3, 5\}$

C: a face superior é um múltiplo de três $\Rightarrow C = \{3, 6\}$

Vamos conhecer algumas operações com eventos

Definição: A **união** dos eventos A e B é um novo evento, denotado por $A \cup B$, formado pelos elementos que são de A, de B ou de ambos.

Exemplos:

A: a face superior é um número par $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\}$

B: a face superior é um número primo $\Rightarrow B = \{2, 3, 5\}$

C: a face superior é um múltiplo de três $\Rightarrow C = \{3, 6\}$

Então:

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\} = D$: "face par **ou** um número primo"

$A \cup C = \{2, 3, 4, 6\} = E$: "face par **ou** múltiplo de três"

$B \cup C = \{2, 3, 5, 6\} = F$: "número primo **ou** múltiplo de três"

Definição: A **intersecção** dos eventos A e B é um novo evento, denotado por $A \cap B$, formado pelos elementos que são de A e de B, simultaneamente.

Exemplos:

A: a face superior é um número par $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\}$

B: a face superior é um número primo $\Rightarrow B = \{2, 3, 5\}$

C: a face superior é um múltiplo de três $\Rightarrow C = \{3, 6\}$

Então:

$A \cap B = \{2\} = G$: "face par **e** número primo"

$A \cap C = \{6\} = H$: "face par **e** múltiplo de três"

$B \cap C = \{3\} = I$: "número primo **e** múltiplo de três"

Definição: O **complementar** do evento A em relação ao espaço amostral é um novo evento denotado por A^c, formado por todos os elementos que não são de A.

Exemplos:

A: a face superior é um número par $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\}$

B: a face superior é um número primo $\Rightarrow B = \{2, 3, 5\}$

C: a face superior é um múltiplo de três $\Rightarrow C = \{3, 6\}$

Então:

$A^c = \{1, 3, 5\} = J$: "face ímpar"

$B^c = \{1, 4, 6\} = L$: "face não é um número primo"

$C^c = \{1, 2, 4, 5\} = M$: "face não é múltiplo de três"

Definição: A **diferença** entre os eventos A e B é um novo evento, $A - B$, formado pelos elementos de A que não pertencem a B.

Exemplos:

A: a face superior é um número par $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\}$

B: a face superior é um número primo $\Rightarrow B = \{2, 3, 5\}$

C: a face superior é um múltiplo de três $\Rightarrow C = \{3, 6\}$

Então:

$A - B = \{4, 6\} = N$: “face par, mas não é número primo”

$B - A = \{3, 5\} = O$: “face é número primo, mas não é par”

$A - C = \{2, 4\} = P$: “face par, mas não é múltiplo de três”

$B - C = \{2, 5\} = Q$: “face é número primo, mas não é múltiplo de três”.

Definição: Dois eventos A e B são chamados **mutuamente exclusivos** ou **disjuntos** se não têm pontos amostrais comuns, ou seja, se $A \cap B = \phi$.

Exemplos:

A: a face superior é um número par $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\}$

B: a face superior é um número primo $\Rightarrow B = \{2, 3, 5\}$

C: a face superior é um múltiplo de três $\Rightarrow C = \{3, 6\}$

Então:

$A \cap B = \{2\} \neq \phi \Rightarrow A$ e B não são eventos mutuamente exclusivos

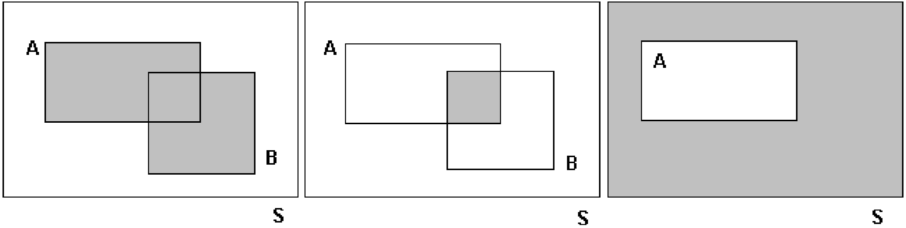
$A \cap C = \{6\} \neq \phi \Rightarrow A$ e C não são eventos mutuamente exclusivos

$B \cap C = \{3\} \neq \phi \Rightarrow B$ e C não são eventos mutuamente exclusivos

Definição: Dois eventos, A e B, são chamados **complementares** se juntos (unidos) formarem o espaço amostral, ou seja, $A \cup B = S$.

Exemplo: Como A e A^c são complementares porque $A \cup A^c = S$

Para visualizar as operações entre eventos usamos os **<u>Diagramas de Venn</u>**. Por exemplo:



$A \cup B$ $\quad$ $A \cap B$ $\quad$ A^c

4.2. PROBABILIDADE

Definição clássica: Suponha que um evento A possa ocorrer de k maneiras diferentes num total de n maneiras possíveis e igualmente prováveis. Então, a $probabilidade$ de ocorrência do evento A é k/n, definida como a **frequência relativa** do evento A.

Definição moderna (axiomática): Uma função $P(.)$ é denominada $probabilidade$ se satisfaz as condições:

$i)$ $0 \leq P(A) \leq 1$, para qualquer evento $A \subset \Omega$

$ii)$ $P(\Omega) = 1$

$iii)$ $P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$, quando os A_j's disjuntos.

Podemos atribuir probabilidades aos eventos com base em:

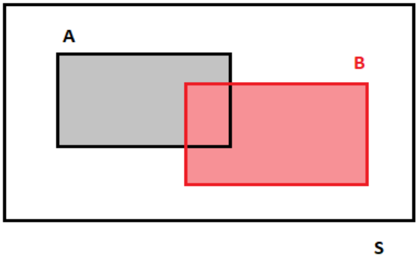
Características teóricas da realização do fenômeno.

Exemplo: A probabilidade de ocorrer uma das faces no lançamento de um dado é 1/6; no lançamento de uma moeda temos $P(cara) = P(coroa) = 1/2$.

Frequência relativa observada do evento em diversas repetições do fenômeno em que pode ocorrer o evento de interesse.

Exemplo: Acompanhar diversos partos para calcular a probabilidade de o primeiro leitão nascido vivo ser uma fêmea.

PROBABILIDADE DA UNIÃO DE EVENTOS:



Sejam A e B dois eventos de S.

A probabilidade de ocorrência do evento A **ou** do evento B é igual a:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemplo: Usando os eventos do exemplo do lançamento de um dado

A: a face superior é um número par $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\}$

B: a face superior é um número primo $\Rightarrow B = \{2, 3, 5\}$

temos $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/2$ e $P(A \cap B) = 1/6$. Então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3+3-1}{6} = \frac{5}{6}$$

Por outro lado, lembrando que o evento $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ tem 5 elementos de um espaço amostral com 6 pontos, tem-se

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6}$$

4.3. Probabilidade condicional

Situação: O fenômeno aleatório acontece em etapas e a informação do que ocorreu em uma etapa pode influenciar na probabilidade de ocorrências em outras etapas.

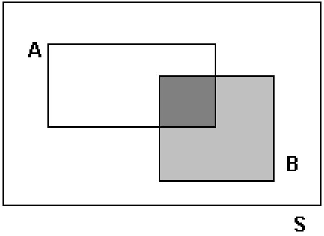
Exemplo: A probabilidade de ganhar na megasena com um jogo simples com 6 dezenas é igual a

$$1/50.063.860 \cong 0{,}00000002$$

Essa probabilidade pode aumentar se for informado que a aposta ganhadora foi feita no estado de São Paulo, em Pirassununga, na lotérica da Avenida etc.

Definição 4.1. Para dois eventos A e B, com $P(B) > 0$, a probabilidade do evento A ocorrer, dado que o evento B já ocorreu **ou** a probabilidade condicional de A dado B, é definida por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{com } P(B) \neq 0$$



Perceba que: A ocorrência do evento B diminui o espaço amostral e a probabilidade de ocorrência do evento A é calculada neste novo espaço amostral.

Nota: Se os eventos A e B <u>não forem disjuntos</u>, ou seja, $A \cap B \neq \emptyset$, a ocorrência do evento B, <u>altera</u> (aumenta ou diminui) a probabilidade de ocorrência do evento A.

Definição: Um evento B é dito **independente** do evento A, se a probabilidade de B ocorrer não é influenciada pelo fato de A já ter ocorrido, isto é,

$$A \text{ é independente de } B \Leftrightarrow P(B) = P(B|A) \text{ ou } P(A) = P(A|B)$$

Usando a fórmula da probabilidade condicional, podemos calcular a probabilidade de ocorrência simultânea de dois eventos:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

ou

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

Definição: Se A e B são dois eventos quaisquer a probabilidade de ocorrência simultânea dos eventos A e B é igual a

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B|A) = P(B) * P(A|B)$$

Definição: Os eventos A e B são chamados **independentes** se a ocorrência de um deles não altera a probabilidade de ocorrência do outro evento, ou seja,

$$P(A) = P(A|B) \text{ ou } P(B) = P(B|A)$$

Vamos calcular algumas probabilidades com base em um estudo fictício envolvendo 1000 estudantes de Pirassununga, classificados pela área de estudo e a classe socioeconômica da sua família.

Exemplo 4.1. Dados (fictícios) sobre a área de estudo escolhida pelo vestibulando e a classe sócio econômica de 1000 estudantes de Pirassununga.

	Classe socioeconômica			
Área	Alta	Média	Baixa	Total
Exatas	120	156	68	344
Humanas	72	85	112	269
Biológicas	169	145	73	387
Total	361	386	253	1000

Calcule a probabilidade de um estudante escolhido ao acaso:

a) Ser da classe econômica mais alta.

b) Estudar na área de exatas.

c) Estudar na área de humanas e ser da classe média.

d) Ser da classe baixa, sabendo-se que estuda na área de biológicas.

e) Ser da classe média ou estudar na área de exatas.

f) Estudar na área de exatas, sabendo-se que é da classe alta.

g) Será que a escolha de um estudante de Pirassununga pela área de Exatas **depende** da classe socioeconômica? E a escolha pela área de Humanas? E pela área de Biológicas?

Solução:

a) $P(\text{Alta}) = 361/1000 = 0{,}361$

b) $P(\text{Exatas}) = 344/1000 = 0{,}344$

c) $P(\text{Humanas} \cap \text{Média}) = 85/1000 = 0{,}085$

d) $P(\text{Baixa} \mid \text{Biológicas}) = 73/387 = 0{,}189$

e) $P(\text{Média} \cup \text{Exatas}) = \dfrac{386}{1000} + \dfrac{344}{1000} - \dfrac{156}{1000} = 0{,}574$

f) $P(\text{Exatas} \mid \text{Alta}) = \dfrac{120}{361} = 0{,}332$

g) $P(\text{Exatas}|\text{Alta}) = 0{,}332$ $\qquad$ $P(\text{Exatas}|\text{Média}) = \dfrac{156}{386} = 0{,}404$

$P(\text{Exatas}|\text{Baixa}) = \dfrac{68}{253} = 0{,}269$ $\qquad$ $P(\text{Exatas}) = 0{,}344$

Como $P(\text{Exatas}|\text{Baixa}) \neq P(\text{Exatas})$, $P(\text{Exatas}|\text{Média}) \neq P(\text{Exatas})$ e $P(\text{Exatas}|\text{Alta}) \neq P(\text{Exatas})$ concluímos que a escolha pela área de Exatas <u>depende</u> da classe socioeconômica do estudante.

O mesmo acontece com as áreas de Humanas e Biológicas (verifique!)

Exemplo 4.2. Consideremos três baias da granja de suínos com as características:

Baia 1: tem 10 leitões, 4 dos quais já foram vacinados

Baia 2: tem 6 leitões, 1 dos quais já foi vacinado

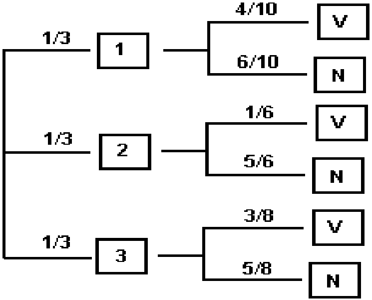
Baia 3: tem 8 leitões, 3 dos quais já foram vacinados

O experimento consiste de duas etapas: sortear uma das três baias e desta baia escolhida sortear um leitão. Pergunta-se:

a) Qual é a probabilidade deste leitão sorteado já estar vacinado?

b) Qual é a probabilidade deste leitão sorteado ser da baia 1, sabendo-se que ele já foi vacinado? E da baia 2? E da baia 3?

$Dica$: Construir um diagrama de árvore.



Evento	Probabilidade
$1 \cap V$	$(1/3)(4/10) = 48/360 \cong 0{,}1333$
$1 \cap N$	$(1/3)(6/10) = 72/360 \cong 0{,}2000$
$2 \cap V$	$(1/3)(1/6) = 20/360 \cong 0{,}0556$
$2 \cap N$	$(1/3)(5/6) = 100/360 \cong 0{,}2778$
$3 \cap V$	$(1/3)(3/8) = 45/360 \cong 0{,}1250$
$3 \cap N$	$(1/3)(5/8) = 75/360 \cong 0{,}2083$

Lembrando que:

$$P(V\,|1) = \frac{P(V \cap 1)}{P(1)} \Rightarrow \mathrm{P}(1 \cap \mathrm{V}) = \mathrm{P}(1)\mathrm{P}(\mathrm{V} \mid 1) = (1/3)(4/10) = 48/360$$

$$\cong 0{,}1333$$

De forma análoga vamos calcular $\mathrm{P}(2 \cap \mathrm{V})$ e $\mathrm{P}(3 \cap \mathrm{V})$

a) P(V) = P(1∩V) + P(2∩V) + P(3∩V)

$= (1/3)(4/10) + (1/3)(1/6) + (1/3)(3/8) = 113/360$

$\Rightarrow$ P(V) $\cong$ 0,3139 P(N) = 1−P(V) $\cong$ 0,6861

- Note que $P(V) \neq \frac{8}{24} = \frac{\#\, vacinados}{\#\, total} = 0{,}3333$, porque o ensaio é realizado em duas fases e as baias têm números diferentes de leitões.

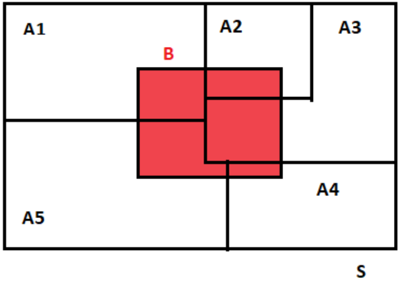
A forma de resolver o item (b) está associada ao Teorema de Bayes, que será conhecido com detalhes a seguir.

O teorema mostra como alterar as probabilidades a *priori* tendo em vista novas evidências para obter probabilidades a *posteriori*.

4.4. TEOREMA DE BAYES

Suponhamos que os eventos A_1, A_2, …, A_k formem uma partição do espaço amostral S, isto é, os eventos A_i são mutuamente exclusivos ($A_i \cap A_j = \emptyset$ para $\forall\, i \neq j$) e exaustivos ($A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = S$).

Seja B outro evento qualquer. Então:



$$B = B \cap S$$
$$= B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k)$$
$$= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_k)$$

Note que os eventos $(B \cap A_i)$, para $i = 1, 2, \ldots, k$, também são mutuamente exclusivos.

Consequentemente, temos que:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_k)$$

Pelo Teorema da Multiplicação $P(B \cap A_i) = P(A_i)P(B|A_i)$ então:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_k)P(B|A_k)$$

A probabilidade condicional de um evento A_i ocorrer, dado que o evento B já ocorreu, é calculada pelo **Teorema de Bayes** como:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$$

ou seja, para calcularmos $P(A_i|B)$ dividimos a probabilidade do caminho $A_i \rightarrow B$ pela probabilidade do espaço amostral reduzido B, formado por todos os caminhos que levam a este evento.

Exemplo 4.2. Consideremos três baias da granja de suínos com as seguintes características:

Baia 1: tem 10 leitões, 4 dos quais já foram vacinados

Baia 2: tem 6 leitões, 1 dos quais já foi vacinado

Baia 3: tem 8 leitões, 3 dos quais já foram vacinados

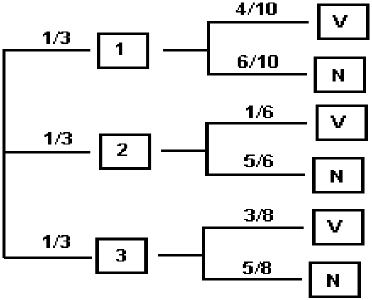
O experimento consiste de duas etapas: sortear uma das três baias e desta baia escolhida sortear um leitão. Pergunta-se:

b) Qual é a probabilidade deste leitão sorteado ser da baia 1 (e da baia 2?) (e da baia 3?), sabendo-se que ele já foi vacinado?

Já sabemos que

$$P(V) = 113/360 \cong 0{,}3139$$

$$P(N) = 1 - P(V) = 247/360 \cong 0{,}6861$$



Evento	Probabilidade
$1 \cap V$	$(1/3)(4/10) = 48/360 \cong 0{,}1333$
$1 \cap N$	$(1/3)(6/10) = 72/360 \cong 0{,}2000$
$2 \cap V$	$(1/3)(1/6) = 20/360 \cong 0{,}0556$
$2 \cap N$	$(1/3)(5/6) = 100/360 \cong 0{,}2778$
$3 \cap V$	$(1/3)(3/8) = 45/360 \cong 0{,}1250$
$3 \cap N$	$(1/3)(5/8) = 75/360 \cong 0{,}2083$

Vamos calcular $P(1|V)$, ou seja, a probabilidade de o leitão sorteado ser da baia 1, sabendo que ele já foi vacinado:

$$P(1|V) = \frac{P(1 \cap V)}{P(V)} = \frac{P(1)P(V|1)}{P(V)} = \frac{48/360}{113/360} = \frac{48}{113} \cong 0{,}4248$$

Portanto, sabendo que o leitão escolhido por sorteio está vacinado, a probabilidade de ele ter sido escolhido da baia 1 é igual a 0,4248.

De maneira análoga, calculamos também as probabilidades do leitão ser da baia 2 ou da baia 3, já sabendo que ele está vacinado:

$$P(2|V) = \frac{20}{113} \cong 0{,}1770$$

$$P(3|V) = \frac{45}{113} \cong 0{,}3982$$

Nota: Sabendo da ocorrência do evento B (o leitão está vacinado), alteraram-se as probabilidades iniciais: $P(1) = P(2) = P(3) = 1/3$.