Viajante aleatório 1 dimensão

$N = \#$ total de passos $= n_d + n_e$

$n_d = \#$ passo à direita

$n_e = \#$ passo à esquerda

$p \equiv$ prob de 1 passo à direita
$q =$ prob de 1 " à esquerda $\Big) \; p+q=1$

$$p(n_d) = \frac{N!}{n_d!\,n_e!}\, p^{n_d} q^{n_e}$$ $\equiv$ probabilidade de em N passos n_d ser à direita ($N-n_d=n_e$ à esquerda)

$$\langle n_d \rangle \equiv \#\text{ média de passos à direita} = \sum_{n_d=0}^{N} n_d\, p(n_d)$$

$$\langle n_d \rangle = \sum_{n_d=0}^{N} n_d \frac{N!}{n_d!\,n_e!}\, p^{n_d} q^{n_e}$$

Defino a função de duas variáveis

$$F(p,q) = \sum_{n_d=0}^{N} \frac{N!}{n_d!\,n_e!}\, p^{n_d} q^{n_e} = \underbrace{\sum_{n_d=0}^{N} \binom{N}{n_d} p^{n_d} q^{n_e}}_{\text{soma binomial.}}$$

$$F(p,q) = (p+q)^N;$$

então $$\langle n_d \rangle = p \frac{\partial}{\partial p} F(p,q) = p\, N\, (p+q)^{N-1}$$

como $p+q=1$ $$\boxed{\langle n_d \rangle = Np}$$

Similarmente

$$\langle n_e \rangle = q \frac{\partial}{\partial q} F(p,q) = q N (p+q)^{N-1}$$

$$\boxed{\langle n_e \rangle = Nq}\,,$$

A localização média é

$$\langle x \rangle = \langle n_d - n_e \rangle = \langle n_d \rangle - \langle n_e \rangle$$

$$\langle x \rangle = N(p-q)$$

também

$$\langle n_d^2 \rangle = \sum_{n_d=0}^{N} n_d^2 P_{(n_d)} = \sum_{n_d=0}^{N} n_d^2 \frac{N!}{n_d!\,n_e!} p^{n_d} q^{n_e}$$

$$\langle n_d^2 \rangle = p\frac{\partial}{\partial p} p \frac{\partial}{\partial p} \underbrace{\sum_{n_d=0}^{N} \frac{N!}{n_d!\,n_e!} p^{n_d} q^{n_e}}_{= (p+q)^N}$$

soma binomial

$$\langle n_d^2 \rangle = p\frac{\partial}{\partial p}\left[Np(p+q)^{N-1} \right] = pN(p+q)^{N-1} + p^2 N(N-1)(p+q)^{N-2}$$

p/ $p+q=1$

$$\langle n_d^2 \rangle = Np + Np^2(N-1) = Np(1-p) + N^2p^2 = Npq + N^2p^2 \quad (*1)$$

$$\langle \Delta n_d^2 \rangle = \langle n_d^2 \rangle - \langle n_d \rangle^2 = Npq$$

é claro que $\langle \Delta n_e^2 \rangle = Npq$

$$x = n_d - n_e = n_d - (N - n_d) = 2n_d - N$$

$$\langle x^2 \rangle = 4\langle n_d^2 \rangle + N^2 - 4N\langle n_d \rangle$$

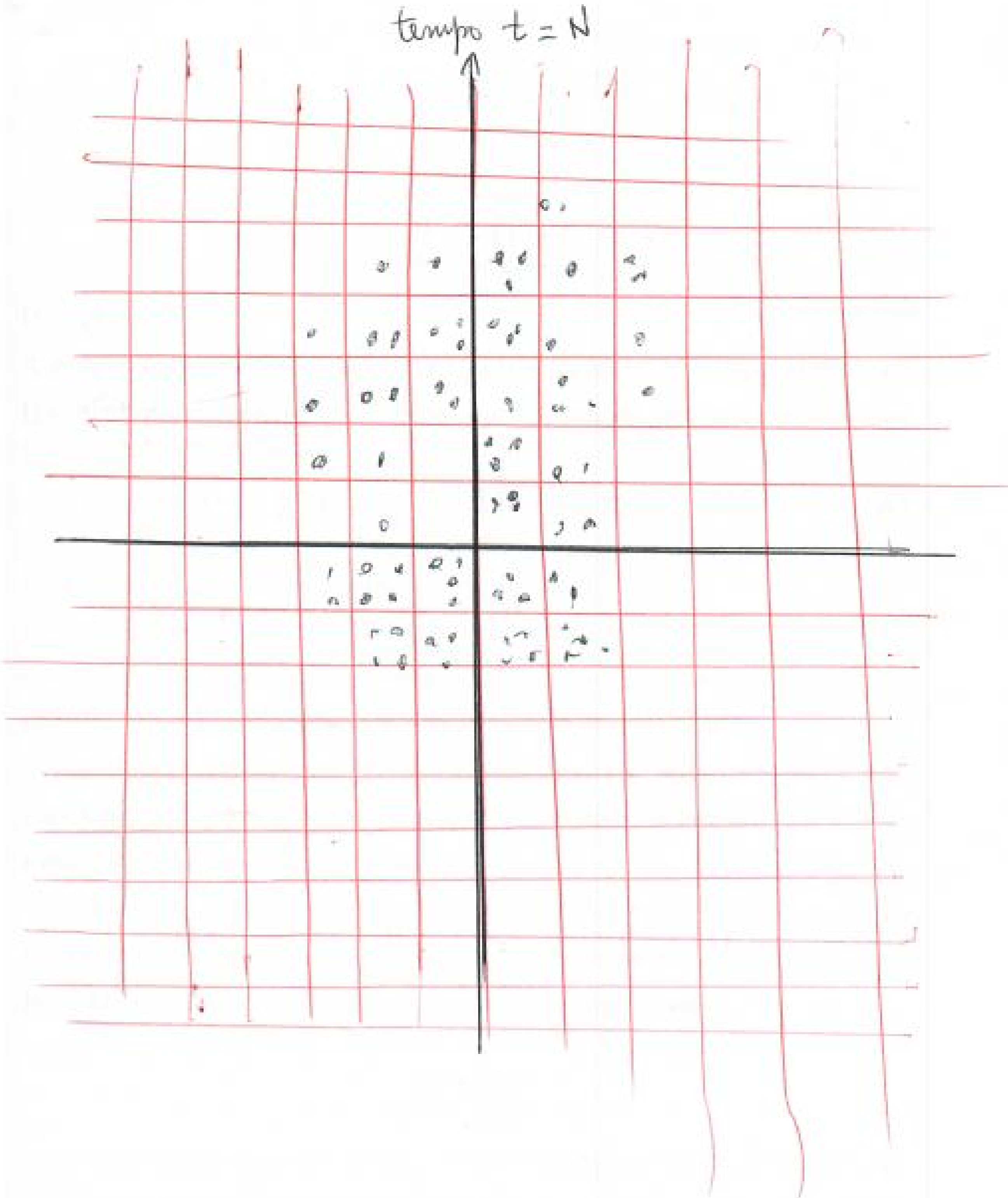
Usando $(*1)$ e $\langle n_d \rangle = Np$.

$$\langle x^2 \rangle = 4(Npq + N^2p^2) + N^2 - 4N^2p = 4Npq + N^2 - 4N^2p(1-p)$$

$$\langle x^2 \rangle = 4Npq + N^2 - 4N^2pq$$

como $\langle x \rangle^2 = N^2 - 4N^2pq$

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = 4Npq$$


tempo t = N