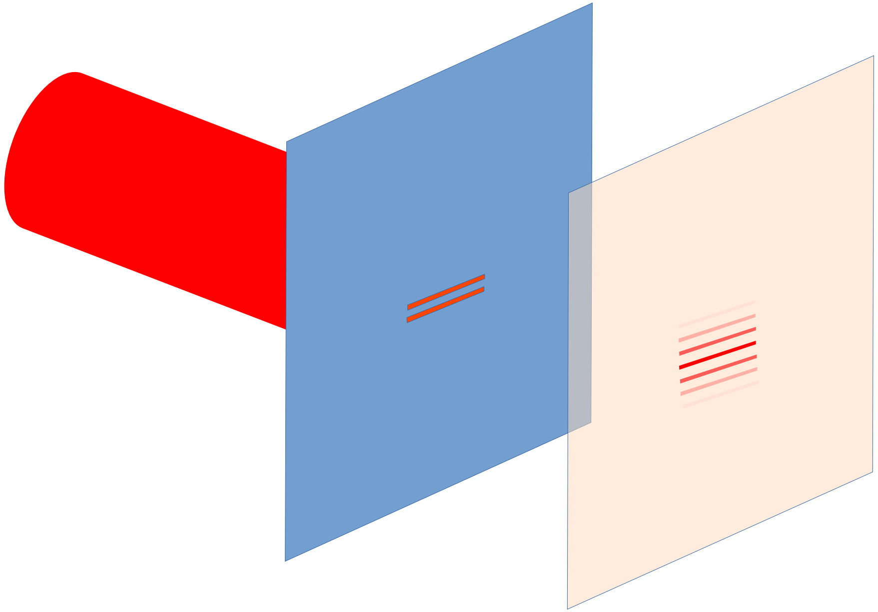
Física IV (IF 2023)
Aula 13

- Objetivos de aprendizagem:
  - Obter o padrão de difração de Fraunhoffer de uma fenda dupla.
  - Obter o padrão de difração de Fraunhoffer de uma rede de difração.
  - Reconhecer características da rede de difração como dispersão e poder separador.
  - Reconhecer como uma rede de difração pode ser usada para analisar o espectro atômico de elementos.

Fenda dupla



Incidência normal:

$$v(P)=\frac{a_0 e^{ikR}}{R}\frac{1}{i\lambda}\int_{S_f} e^{-ik\hat{u}.\vec{r}\,'}dS_f$$

Amplitude de espalhamento:

$$f(k,\hat{u})=\frac{1}{i\lambda}\int_{S_f} e^{-ik\hat{u}.\vec{r}\,'}dS_f$$

Caso “unidimensional” (x)

$$f(k,\alpha)=\frac{1}{i\lambda}\int_{A} e^{-ik\alpha x}dx$$

Fenda dupla

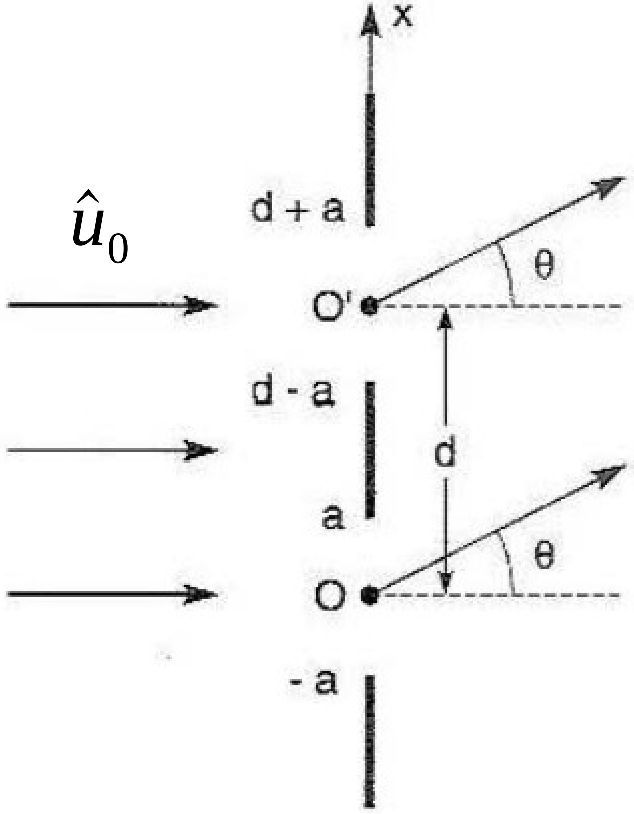


Fig. 4.28 Par de fendas

$$f(k,\alpha)=\frac{1}{i\lambda}\int_{A_f} e^{-ik\alpha x}dx$$

$$f(k,\alpha)=\frac{1}{i\lambda}\left(\int_{-a}^{a} e^{-ik\alpha x}dx+\int_{d-a}^{d+a} e^{-ik\alpha x}dx\right)$$

Mostrar $\rightarrow$ $f(k,\alpha)=f_1(k,\alpha)\left(1+e^{-ik\alpha d}\right)$

(Amp. Esp. 1 fenda)

$\alpha=\text{sen}\,\theta$ (cosseno diretor)

$\Delta=kd\,\alpha=kd\,\text{sen}\,\theta$ (defasagem)

Resultado

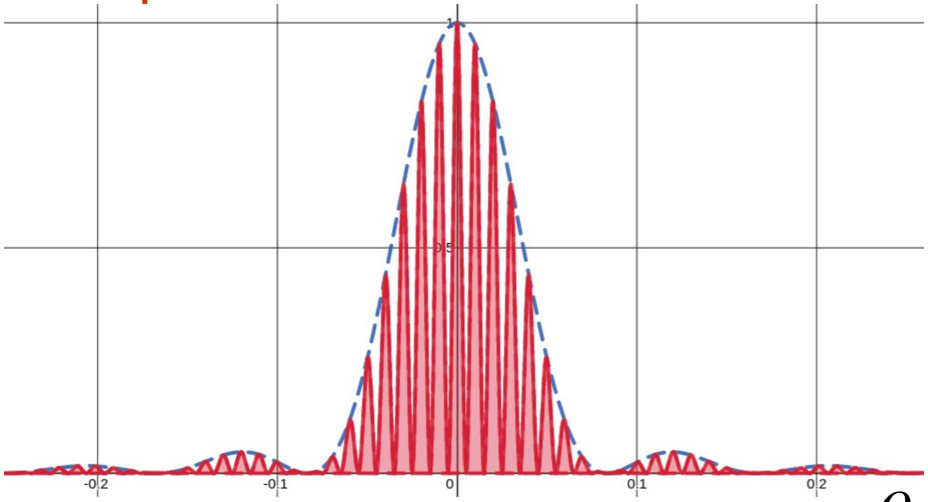
- $\rightarrow \dfrac{I}{I_0} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 X}{X^2} \cos^2\left(\dfrac{\Delta}{2}\right)$

$$X = k\,\alpha\,a$$

$$\Delta = k\,\alpha\,d$$

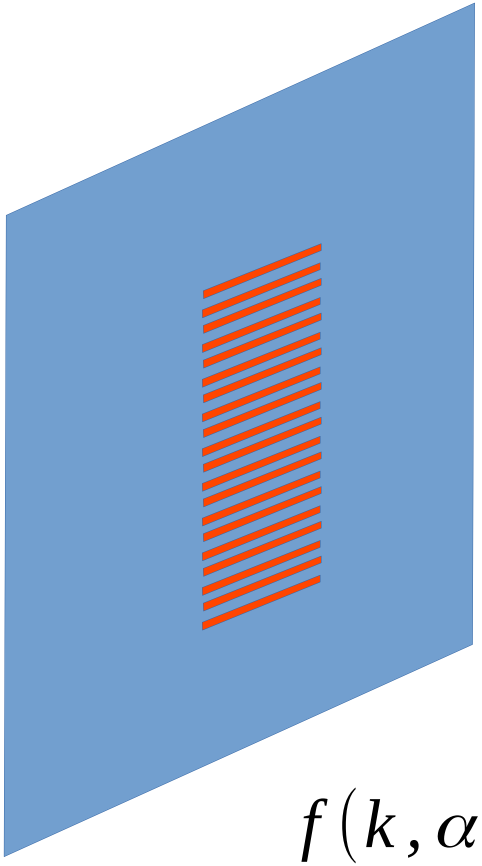
$$\alpha = \operatorname{sen}\theta$$

- Desmos → https://www.desmos.com/calculator/amwi5n6e5c



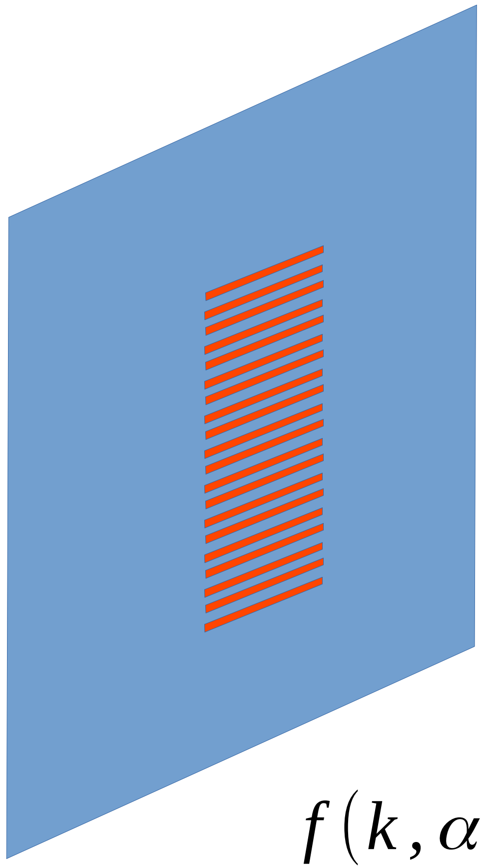
θ

N fendas = rede de difração



$$f(k,\alpha)=f_1(k,\alpha)\left(1+e^{-ik\alpha d}+e^{-ik\alpha 2d}+e^{-ik\alpha 3d}\ldots+e^{-ik\alpha(N-1)d}\right)$$

N fendas = rede de difração



Série geométrica

$$s(N)=1+q+q^2+\ldots q^{(N-1)} \qquad q=e^{-ik\alpha d}=e^{-i\Delta}$$

$$s(N)=\frac{1-q^N}{1-q}=\frac{1-e^{-iN\Delta}}{1-e^{-i\Delta}}$$

$$I(\alpha)=I_1(\alpha)|s(N)|^2$$

$$f(k,\alpha)=f_1(k,\alpha)\left(1+e^{-ik\alpha d}+e^{-ik\alpha 2d}+e^{-ik\alpha 3d}\ldots+e^{-ik\alpha(N-1)d}\right)$$

Resultados

- →

$$I_N(\alpha)=I_1(\alpha)\frac{\mathrm{sen}^2(N\frac{\Delta}{2})}{\mathrm{sen}^2(\frac{\Delta}{2})}$$

- → N=2 recupera o resultado de fenda dupla
- Normalização (I_N) → N^2 (limite pela regra de l'Hôpital)
- Intensidade grande quando o denominador é pequeno
- Período: $\Delta\alpha=\frac{\lambda}{d}$ → Desmos

https://www.desmos.com/calculator/d8mcxe2nrs

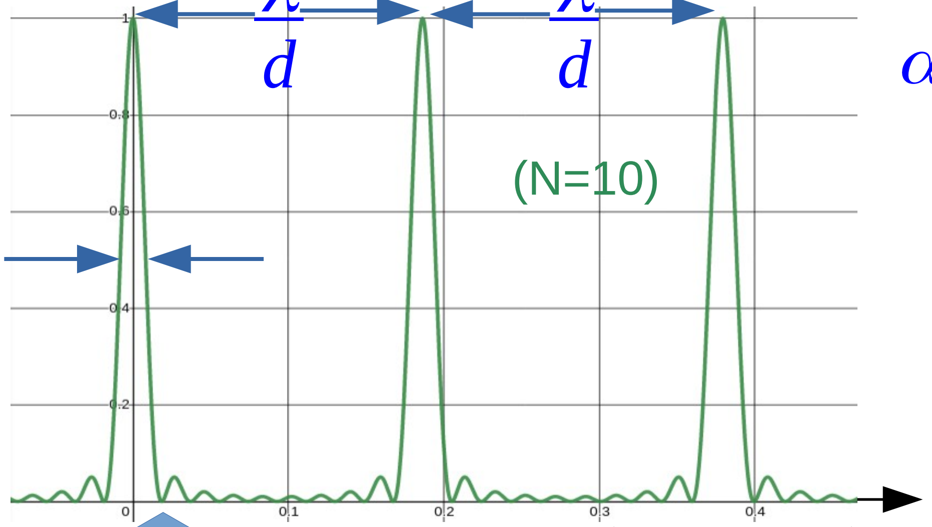
N grande

- Máximos principais dominam $\alpha_m = m\dfrac{\lambda}{d}, \ (m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$
- Semi-largura de cada pico: $\Delta\alpha = \Delta\,\mathrm{sen}\,\theta \approx \cos\theta\,\Delta\theta = \dfrac{\lambda}{Nd}$

$$\frac{I_N(\alpha)}{I_1(\alpha)} = \frac{\mathrm{sen}^2\left(N\frac{\Delta}{2}\right)}{\mathrm{sen}^2\left(\frac{\Delta}{2}\right)}$$

$m=0$ $\quad \dfrac{\lambda}{d} \quad$ $m=1$ $\quad \dfrac{\lambda}{d} \quad$ $m=2$

$$\alpha_m = m\frac{\lambda}{d}$$



Semi-largura $\dfrac{\lambda}{Nd}$

α

$$\Delta = k\,d\,\alpha = 2\pi\frac{d}{\lambda}\alpha$$

1º zero de $\mathrm{sen}\left(N\frac{\Delta}{2}\right)=0 \Rightarrow N\frac{\Delta}{2}=\pi$ $\quad \alpha = \dfrac{\lambda}{Nd}$

Dispersão

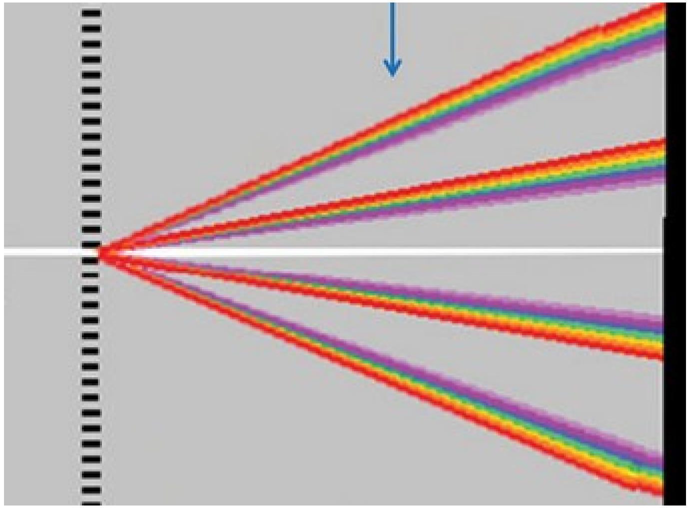
- Separação de comprimentos de ondas diferentes (decomposição espectral)

$$D=\frac{d\,\theta}{d\,\lambda}$$

$$\alpha_m=m\frac{\lambda}{d}$$

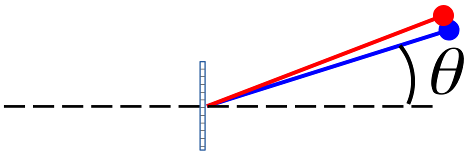
$$\Delta\,\alpha=\Delta\,\mathrm{sen}\,\theta\approx\cos\theta\,\Delta\,\theta=\frac{m}{d}\,\Delta\,\lambda$$

$$D=\frac{d\,\theta}{d\,\lambda}\approx\frac{1}{\cos\theta}\,\frac{m}{d}$$



Poder separador

- Comprimento de onda dividido pelo Limite de separação entre comprimentos de onda: $$S=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

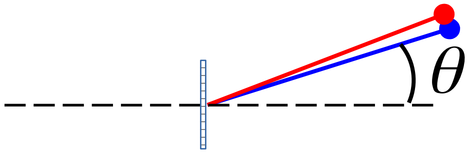


Máximo do comprimento de onda menor: λ

Máximo do comprimento de onda maior: $\lambda+\Delta\lambda$

Poder separador

- Comprimento de onda dividido pelo Limite de separação entre comprimentos de onda: $\boxed{S=\dfrac{\lambda}{\Delta\lambda}}$



Máximo do comprimento de onda menor: λ

$$\alpha_m(\lambda)=\operatorname{sen}\theta(\lambda)=\frac{m}{d}\lambda$$

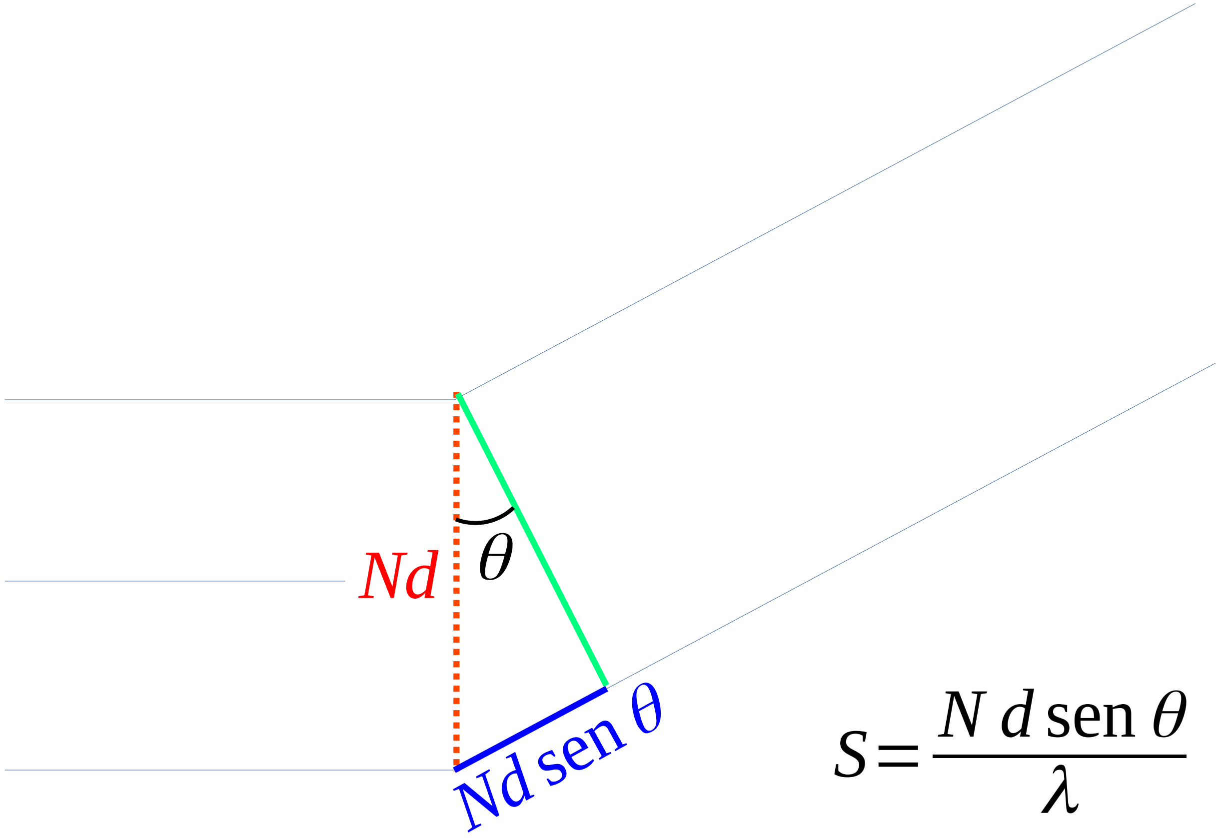
Largura do máximo

Máximo do comprimento de onda maior: $\lambda+\Delta\lambda$

$$\operatorname{sen}\theta(\lambda+\Delta\lambda)=\frac{m}{d}(\lambda+\Delta\lambda)=\frac{m}{d}\lambda+\frac{m}{d}\Delta\lambda=\frac{m}{d}\lambda+\frac{\lambda}{Nd}\quad\rightarrow\quad\frac{m}{d}\Delta\lambda=\frac{\lambda}{Nd}$$

$$S=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=mN\qquad\left(m=\frac{d}{\lambda}\operatorname{sen}\theta\right)\qquad S=N\frac{d}{\lambda}\operatorname{sen}\theta$$

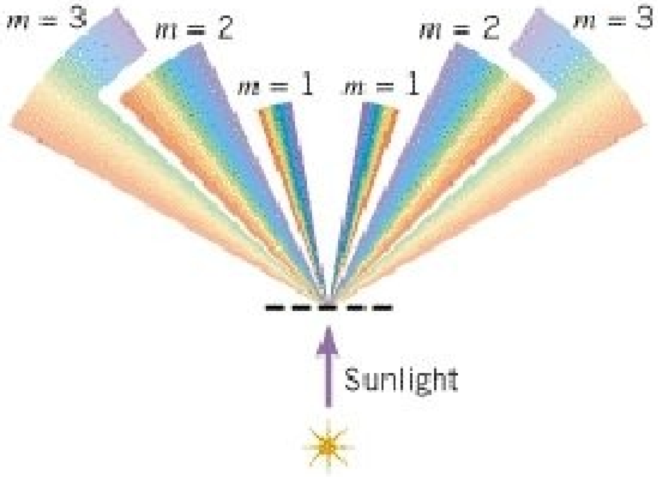
Interpretação geométrica



$$S = \frac{N\,d\,\text{sen}\,\theta}{\lambda}$$

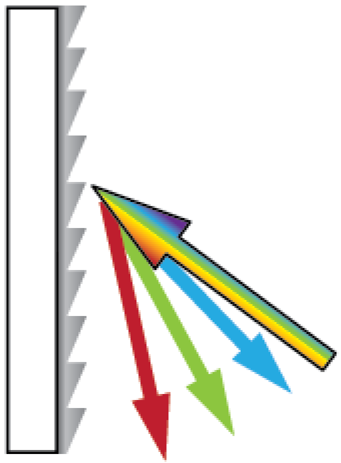
Melhor rede

- Maior N (maior S, maior I)
- Menor d (maior D)
- Maior m, mas pode ocorrer sobreposição de espectros

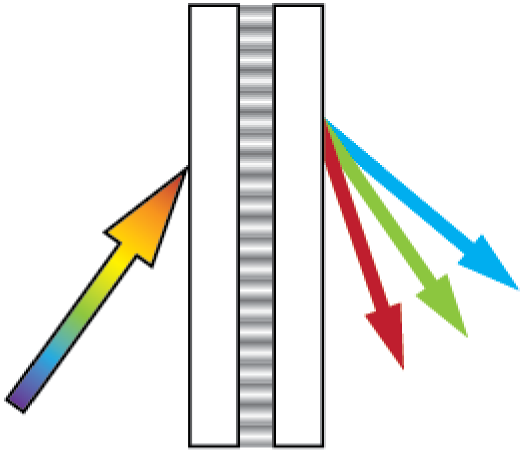


Tipos de redes

- Reflexão/Transmissão
- 250-3000 linhas/mm (tipicamente)

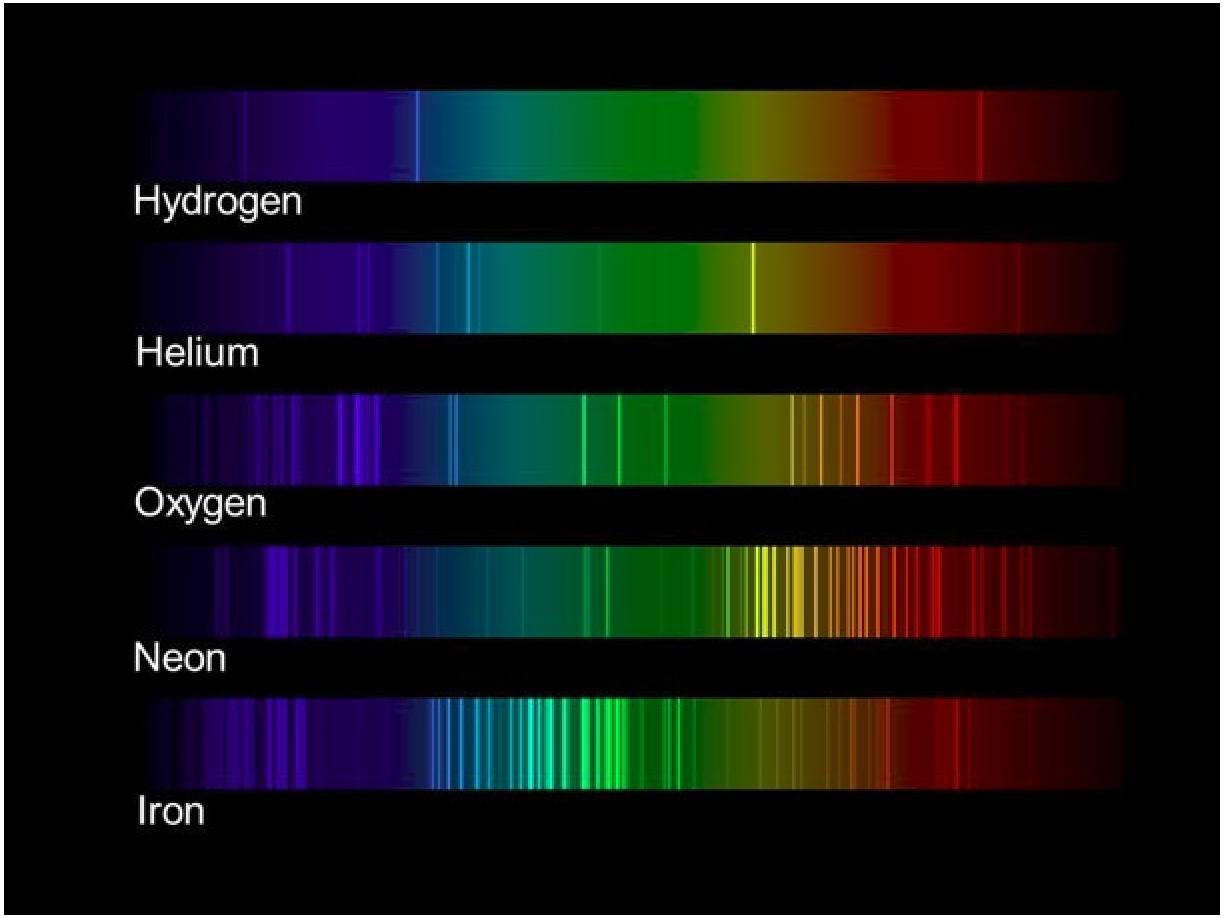


Relevo



Holográfica

Linhas espectrais



Espectrógrafo