MAT2352 - Cálculo para funções de várias variáveis II
3a. Lista de Exercícios - 2o. semestre de 2023

1. Calcule as integrais iteradas:

(a) $\int_0^1 \int_0^z \int_0^y xyz\, dxdydz$ (b) $\int_0^\pi \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} z \sin y\, dxdzdy$. Resp. (a) $\frac{1}{48}$, (b) $\frac{16}{3}$.

2. Calcule as integrais triplas:

(a) $\iiint_D yz\, dxdydz$, onde $D = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq 2z, 0 \leq x \leq z + 2\}$.

(b) $\iiint_D y\, dxdydz$, onde D é a região abaixo do plano $z = x + 2y$ e acima da região no plano xy limitada pelas curvas $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 1$.

(c) $\iiint_D xy\, dxdydz$, onde D é o tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 3)$.

(d) $\iiint_D z\, dxdydz$, onde D é limitada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 1$ e $x + z = 1$.

(e) $\iiint_D x\, dxdydz$, onde D é limitada pelo parabolóide $x = 4y^2 + 4z^2$ e pelo plano $x = 4$.

Resp. (a) $\frac{7}{5}$, (b) $\frac{5}{28}$, (c) $\frac{1}{10}$, (d) $\frac{1}{12}$, (e) $\frac{16\pi}{3}$.

3. Calcule as seguintes integrais:

(a) $\iiint_E (x^2 + y^2)\, dxdydz$, onde E é a região limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos $z = -1$ e $z = 2$.

(b) $\iiint_E y\, dxdydz$, onde E é a região entre os cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 1$, limitada pelo plano xy e pelo plano $z = x + 2$.

(c) $\iiint_E x^2\, dxdydz$, onde E é o sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, pelo cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ e contido no semiespaço $z \geq 0$. Resp. (a) 24π, (b) 0, (c) $2\pi/5$.

4. Determine o volume da região R limitada pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.
Resp.162π.

5. Determine a massa e o centro de massa do cubo $Q = [0, a] \times [0, a] \times [0, a]$ cuja densidade é dada pela função $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Resp. a^5,$(7a/12, 7a/12, 7a/12)$.

6. Calcule as integrais:

(a) $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz$, onde B é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

(b) $\iiint_E y^2\, dxdydz$, onde E é a parte da bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ contida no primeiro octante.

(c) $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$, onde E é a região interior ao cone $\phi = \pi/6$ e à esfera $\rho = 2$.

Resp. (a) $4\pi/5$, (b) $\pi/30$, (c) $4\pi(2 - \sqrt{3})$.

7. Calcule a integral

$$\int_0^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} \int_0^{\sqrt{25-x^2-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\, dzdydx\,.$$

Resp. $\frac{\pi}{2}(5-\arctan(5))$.

8. Calcule o volume da região limitada pelo elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ Resp. $\frac{4}{3}\pi abc$.

9. Calcule a integral $\displaystyle\iiint_E x\,dxdydz$, onde $E=\{(x,y,z): \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+z^2\le 1,\ x\ge 0\}$. Resp. 3π.

10. Calcule o volume da região acima do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e dentro da esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$.
Resp. $\frac{a^3\pi}{3}(2-\sqrt{2})$

11. Calcule a massa da região acima do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$, dentro da esfera $x^2+y^2+z^2=2az,\ a>0$ com $\delta(x,y,z)=x^2+y^2$ Resp. $\frac{11}{30}\pi a^5$.

12 Calcule $\displaystyle\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, onde V é o sólido limitado por $x^2+y^2+z^2=2z,\ z=\sqrt{x^2+y^2}$ e $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ Resp. $\frac{(9\sqrt{3}-4\sqrt{2})\pi}{20}$.

13. Com as funções densidades δ dadas, calcule a massa da região E limitada por:

(a) $z(x^2+y^2)=2, z=0, x^2+y^2=1, x^2+y^2=2$, com $x\ge 0$ e $y\le 0$ e $\delta(x,y,z)=1$ Resp. $\frac{\pi\ln 2}{2}$.

(b) $z^2=x^2+y^2, x^2+y^2-2y=0$, para $x\ge 0$ com $\delta(x,y,z)=1$ Resp. $\frac{32}{9}$.

(c) $x^2+y^2=1+z^2, x^2+y^2=4$ com $\delta(x,y,z)=|z|$; Resp.$\frac{9\pi}{2}$.

(d) $x^2+y^2=1+z^2, x^2+y^2=z^2$, para $|z|\le a$ com $\delta(x,y,z)=|z|$; Resp. πa^2.

(e) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1+z^2, \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=2z^2$ com $\delta(x,y,z)=1$; Resp. 8π.

(f) $x^2+y^2=1+z^2, x^2+y^2=2+2z^2$, para $|z|\le a$ com $\delta(x,y,z)=z^2$. Resp. $2\pi(\frac{a^5}{5}+\frac{a^3}{3})$.

14. Decida quais dos subconjuntos de R^3 abaixo são fechados, quais são abertos e quais são compactos. Justifique.

a) O paralelepípedo $[1,2]\times[0,3]\times[-3,1]$.
b) O paralelepípedo $]1,2[\times]0,3]\times]-3,1]$.
c) O semiespaço aberto $\{(x,y.z)\in\mathbb{R}^3 : x>0\}$.
d) O semiespaço fechado $\{(x,y.z)\in\mathbb{R}^3 : x\ge 00\}$.
e) A bola aberta de centro em P, $B_P(r):=\{Q=(x,y.z)\in\mathbb{R}^3 : d(P,Q)<r\}$.
e) A bola fechada de centro em P, $B_P(r):=\{Q=(x,y.z)\in\mathbb{R}^3 : d(P,Q)\le r\}$.
e) $\mathbb{R}^3$.

15. Determine a fronteira em cada um dos subconjuntos do exercício anterior.