EXERCÍCIO 8 DA TERCEIRA LISTA

8) Sejam $u := (x_1, \ldots, x_n)$ e $v := (y_1, \ldots, y_n)$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Mostre que um deles é múltiplo do outro se, e somente se, $x_i y_j = x_j y_i$ quaisquer que sejam i e j em $\{1, \ldots, n\}$.

RESOLUÇÃO.

($\Rightarrow$)

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é tal que $u = \lambda v$, então

$$(x_1, \ldots, x_n) = \lambda (y_1, \ldots, y_n) = (\lambda y_1, \ldots, \lambda y_n),$$

e, portanto, $x_i = \lambda y_i$ qualquer que seja $i \in \{1, \ldots, n\}$. Logo, nesse caso, para quaisquer i e j em $\{1, \ldots, n\}$,

$$x_i y_j = (\lambda y_i) y_j = y_i (\lambda y_j) = y_i x_j.$$

Da mesma forma, mostra-se que, se $\alpha \in \mathbb{R}$ é tal que $v = \alpha u$, então $x_i y_j = x_j y_i$ quaisquer que sejam i e j em $\{1, \ldots, n\}$ (basta repetir o raciocínio anterior com u no lugar de v e v no lugar de u).

($\Leftarrow$)

Suponhamos que $x_i y_j = x_j y_i$ quaisquer que sejam i e j em $\{1, \ldots, n\}$ e vamos mostrar que, ou u é múltiplo de v, ou v é múltiplo de u. Para isso, notemos, inicialmente, que, se $u=(0,\dots,0)$, então $u=0.v$. Em vista disso, podemos supor, de agora em diante, que u seja não nulo. Nesse caso, o conjunto $I:=\{i\in\{1,\dots,n\}: x_i\neq 0\}$ é não vazio. Seja $i_0\in I$. Como $x_{i_0}\neq 0$, e

$$x_{i_0}y_j=x_jy_{i_0}$$

qualquer que seja $j\in\{1,\dots,n\}$, para cada $j\in\{1,\dots,n\}$,

$$y_j=(x_{i_0}^{-1}\cdot y_{i_0}).x_j=a\,x_j,$$

em que $a:=x_{i_0}^{-1}\cdot y_{i_0}$. Logo,

$$v=(y_1,\dots,y_n)=(a x_1,\dots,a x_n)=a\cdot(x_1,\dots,x_n)=a\cdot u,$$

e, portanto, v é múltiplo de u.