Aula 1

Seção 1.1.4

(1) Farei os itens (h), (i), (j). Os anteriores seguem da definição de $z \in \mathbb{C}$, $z := a + bi$, tal que $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$ e $\bar{z} := a - bi$.

(h) Quero mostrar que $|z+w| \leq |z| + |w|$ (desigualdade triangular). Partimos de (f):

$$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + \mathrm{Re}(z \cdot \bar{w}),$$

tal que (g) indica que $\mathrm{Re}(z \cdot \bar{w}) \leq |z \cdot \bar{w}|$, por (e) temos $|z \cdot \bar{w}| = |z| \cdot |\bar{w}|$ e por (c) temos $|\bar{w}| = |w|$, então

$$|z+w|^2 \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \cdot |w| = (|z| + |w|)^2$$

$$\Longrightarrow |z+w| \leq |z| + |w|.$$

(i) Quero mostrar que $||z|-|w|| \leq |z+w|$.

$$(|z|-|w|)^2 = |z|^2 \underbrace{- 2|z|\cdot|w|}_{\leq 0} + |w|^2$$

$$\leq |z|^2 + |w|^2$$

$$\leq |z|^2 + 2\underbrace{Re(z\cdot\bar{w})}_{\geq 0} + |w|^2$$

tal que $|z|^2 + 2Re(z\cdot\bar{w}) + |w|^2 = |z+w|^2$ pelo item (f), portanto

$$||z|-|w||^2 \leq |z+w|^2$$

$$\Longrightarrow \quad ||z|-|w|| \leq |z+w|.$$

(j) Quero mostrar que $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$. Por um lado,

$z\cdot z^{-1} = 1 \Rightarrow \bar{z}\cdot z\cdot z^{-1} = \bar{z}\cdot 1 \Rightarrow |z|^2\cdot z^{-1} = \bar{z}$

$\Rightarrow z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} \Rightarrow \overline{z^{-1}} = \dfrac{z}{|z|^2}$.

Por outro lado, $\bar{z}\cdot\bar{z}^{-1} = 1 \Rightarrow z\cdot\bar{z}\cdot\bar{z}^{-1} = z \Longrightarrow$

$|z|^2\bar{z}^{-1} = z \Rightarrow \bar{z}^{-1} = \dfrac{z}{|z|^2}$.

$$\therefore \overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$$

Seção 1.2.3

① Seja A um grupo. Mostre que:

(a) O elemento neutro é único.

R: Seja $0 \in A$ o elemento neutro. Suponha a existência de outro elemento neutro $\bar{0} \in A$. Então $\forall a \in A$,

$$a + 0 = 0 + a = a$$
$$a + \bar{0} = \bar{0} + a = a.$$

Assim, $a + 0 = a + \bar{0} \Rightarrow \underbrace{-a + a}_{0} + 0 = \underbrace{-a + a}_{\bar{0}} + \bar{0}$,

porém $0 + 0 = 0$ e $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$, $\therefore$ $0 = \bar{0}$.

(b) O oposto de um dado elemento é único.

R: Suponha que $a \in A$ tenha dois opostos b_1, b_2 distintos. Então $a + b_1 = 0$ e $a + b_2 = 0$, tal que $a + b_1 = a + b_2 \Rightarrow \underbrace{b_2 + a}_{=0} + b_1 = b_2 + \underbrace{a + b_2}_{=0}$

pois a é elemento oposto de b_2 com relação ao elemento neutro do grupo A

$\Rightarrow 0 + b_1 = b_2 + 0$ $\therefore$ $b_1 = b_2$

(c) Vale a lei do cancelamento.

R: Se $a+b=a+c$, então

$$\underbrace{-a+a}_{0}-b=\underbrace{-a+a}_{0}+c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0+b=b, \quad 0+c=C \quad \therefore \quad b=C$$

2. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Mostre que

(a) $a\cdot 0=0$ para todo $a\in\mathbb{K}$.

R: Lembro que $(\mathbb{K},+)$ e $(\mathbb{K}\setminus\{0\},\cdot)$ são grupos abelianos, então

$$\begin{aligned} a\cdot 0 &= 0\cdot a \\ &= 0\cdot a+0\cdot a+(-0\cdot a) \\ &= (0+0)\cdot a+(-0\cdot a) \\ &= 0\cdot a+(-0\cdot a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b) Se $a\cdot b=0$, então ou $a=0$ ou $b=0$.

R: Suponha que $a\neq 0$. Então $\exists a^{-1}\in\mathbb{K}$ tal que $a^{-1}\cdot a=a\cdot a^{-1}=1$, logo $a\cdot b=0 \Rightarrow \underbrace{a^{-1}\cdot a}_{=1}\cdot b=\underbrace{a^{-1}\cdot 0}_{=0}$, então $b=0$. Similarmente, suponha $b\neq 0$, então

$a\cdot b=0 \Rightarrow a\cdot b\cdot b^{-1}=0\cdot b^{-1} \Rightarrow a\cdot 1=0 \Rightarrow a=0.$ ∎

(c) Se $a \in \mathbb{K}$, $-a = (-1) \cdot a$.

R: $(1-1)a = 0 \cdot a$ e $(1-1)a = 1a + (-1)a$

$$\Rightarrow \underbrace{1a}_{a} + (-1)a = \underbrace{0 \cdot a}_{0} \Rightarrow \underbrace{-a + a}_{0} + (-1)a = -a$$

$$\therefore (-1)a = -a$$

3) Definimos a característica de um corpo $\mathbb{K}$, car $\mathbb{K}$, por: (i) se a soma $1 + \ldots + 1$ sempre for diferente de zero, car $\mathbb{K} = 0$; (ii) se $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{m \text{ vezes}} = 0$ para um $m \geq 2$, então car $\mathbb{K} = m$.

(a) Mostre que se car $\mathbb{K} = m \neq 0$, m é número primo.

R: A demonstração será por absurdo. Suponha que m não é primo. Então existem $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q > 1$, tais que $m = pq$. Sendo m o menor número para o qual $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{m \text{ vezes}} = 0$, então existe $K_p \in \mathbb{K}$ não nulo tal que

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{p \text{ vezes}} = K_p, \quad \underbrace{K_p + K_p + \ldots + K_p}_{q \text{ vezes}} = 0.$$

No entanto, sendo $\mathbb{K}$ um corpo e $K_p \neq 0$, existe um inverso da multiplicação K_p^{-1} tal que $K_p \cdot K_p^{-1} = 1$. Como vale a distributiva,

$$\underbrace{(K_p + \ldots + K_p)}_{q \text{ vezes}} K_p^{-1} = 0 \Rightarrow \underbrace{1 + \ldots + 1}_{q \text{ vezes}} = 0 \Rightarrow \text{car } \mathbb{K} = q < m.$$

Mas isso contradiz a hipótese que car $\mathbb{K} = n$, então n precisa ser um número primo. Note que o argumento seria equivalente se usássemos $k_q \in \mathbb{K}$ não nulo tal que $\underbrace{k_q + \dots + k_q}_{p \text{ vezes}} = 0$.

(b) Exiba corpos com característica igual a 0 e outros com característica diferente de zero.

R: $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são exemplos de corpos em que $\underbrace{1 + \dots + 1}_{k} \neq 0$ para todo k, então car $\mathbb{R}$ = car $\mathbb{Q} = 0$.

Os anéis de inteiros módulo p, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ou simplesmente $\mathbb{Z}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}\}$, são exemplos de corpos cujas características são diferentes de zero. No caso, car $\mathbb{Z}_p = p$.