Fizemos a descrição semântica, em contextos dados, de como interpretar fórmulas e verificar a verdade ou falsidade de sentenças – as fórmulas fechadas. Prosseguiremos nosso estudo de Teorias Axiomáticas, definindo o que se entende por axiomas e teoremas, bem como dando a descrição semântica de como se obtém os segundos a partir dos primeiros, no desenvolvimento de tais teorias matemáticas.

2) OS AXIOMAS DE UMA TEORIA FORMAL

Em toda teoria axiomática pretende-se descrever o funcionamento de certas propriedades e relações entre determinados tipos de objetos. Assim, por exemplo, na geometria axiomática trata-se das relações entre pontos, retas e planos; na aritmética fala-se das propriedades específicas dos números inteiros e na teoria dos conjuntos descrevem-se características e propriedades matematicamente relevante sobre coleções em geral. Ao fazer uma teoria axiomática parte-se de objetos básicos (de um determinado discurso), sobre os quais se fala – sem defini-los. Eles serão referidos nas fórmulas por meio das variáveis; alguns terão nomes próprios (designados por constantes); porém não é fornecida uma definição explícita para eles. Para descrever uma teoria são postuladas descrições das propriedades ou relações essenciais (ou básicas) que os objetos do seu discurso devem satisfazer. Tais postulações constituem-se nos axiomas da teoria. Assim os axiomas de uma teoria são fórmulas fechadas (sem ocorrência de variáveis livres) que servem como "definição" (fracas, no sentido lato desta palavra) dos objetos da teoria, de suas propriedades intrínsecas. De fato, os axiomas definem o que é importante que seus objetos satisfaçam, e não qual seja a sua natureza, sua constituição específica ou sua essência ontológica. Em cada contexto ou modelo fixado de uma dada teoria axiomática os elementos que concretizam ou interpretam os objetos referidos na teoria podem ter natureza bastante distintas. Vejamos um exemplo.

Exemplo: um grupo é qualquer conjunto que satisfaça os seguintes axiomas na Linguagem Formal da Teoria de Grupos, segundo uma dada interpretação para os símbolos próprios da Teoria de Grupos, que são uma constante – 0 – e uma função binária – +:

Ax1: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x + y) + z = x + (y + z))$ (propriedade associativa)
Ax2: $(\forall x)(x + 0 = x \wedge 0 + x = x)$ (o 0 é o elemento neutro da operação +)
Ax3: $(\forall x)(\exists y)(x + y = 0 \wedge y + x = 0)$ (propriedade da existência de opostos)

Podemos constatar que (verifiquem!):

1. <Z,0,+> é um grupo. (no conjunto dos números inteiros, onde os símbolos 0 e + são interpretados da maneira usual)

2. $\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x,y,z,t \in R \right\} = M_{2x2}(R) \ , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ ,+ \right\rangle$ é um grupo. (no conjunto das matrizes reais 2x2 munido da interpretação usual para a adição e para seu elemento neutro)

3. $\langle Q^+ = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in N, q \neq 0\right\}, 1, \cdot\rangle$ é um grupo. (no conjunto dos racionais positivos com o número um interpretando o símbolo 0 – como elemento neutro – e $\cdot$ a operação de multiplicação usual entre racionais interpretando o símbolo +)

Ou seja, os axiomas descrevem o que é importante sobre o elemento neutro e sobre as propriedades da operação, relacionadas (ou não) com o neutro. Mas podemos ter conjuntos muito diferentes, com operações muito diferentes e elementos neutros distintos entre si que satisfazem os axiomas e que, portanto, são grupos. Mas que ninguém venha me dizer, por exemplo, que:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1\ !$$

Obs. Finalizando, é claro então que as listas de axiomas dependerão de cada teoria. Porém há um conjunto de axiomas comuns a todas as teorias. São os axiomas do Cálculo de Predicados de 1ª ordem, que veremos posteriormente, quando formos introduzir a noção de dedução sintática de teoremas. No que segue imediatamente, ao descrever os teoremas, faremos a descrição do que sejam demonstrações semânticas de teoremas. De fato, elas correspondem às demonstrações mais usualmente feitas na Matemática, seja escolar ou profissional.

3. OS TEOREMAS DE UMA TEORIA FORMAL

Os axiomas próprios de uma teoria fixam as propriedades básicas ou as verdades iniciais da teoria. O desenvolvimento de uma teoria axiomática se faz por meio do estudo das consequências lógicas destes axiomas. No que segue, letras gregas minúsculas serão sempre variáveis metalinguísticas para indicar fórmulas de uma teoria formal.

Definição 4: Uma fórmula φ é dita uma decorrência ou consequência semântica dos axiomas se para ela for verdadeira a seguinte propriedade: sempre, em todos os contextos nos quais todos os axiomas forem verdadeiros φ também é verdadeira. Nesse caso φ é chamada de teorema da teoria.

Obs1. Como já dito anteriormente, uma teoria axiomática busca provar teoremas, ou seja, as afirmações decorrentes (semanticamente, nesse momento da apostila) dos axiomas. Uma prova ou demonstração semântica sobre determinada fórmula ser teorema da teoria é, assim, uma sequência finita de argumentações metalinguísticas (feitas em português, no nosso caso) logicamente corretas, podendo incluir verdades lógicas ou axiomas da teoria, que nos permitam concluir pela verdade do teorema, uma vez admitida a verdade dos axiomas da teoria axiomática nos Universos compatíveis com linguagem formal da teoria.

Obs2. Palavras como proposição, corolário, lema, serão, aqui, consideradas como sinônimos de teorema. Normalmente, na Matemática, estas palavras só diferem no sentido de cada uma indicar um grau diferente na dificuldade das suas demonstrações – mas todas elas indicam afirmações que são demonstradas, logicamente, a partir dos axiomas.

Exemplo: Retomemos a teoria de grupos com seus axiomas, dados no item anterior. Vejamos que é teorema desta teoria a unicidade do oposto de qualquer objeto do discurso. Ou seja, em

linguagem formal, mostremos que a seguinte fórmula (que afirma a unicidade dos opostos aditivos) é teorema da teoria dos grupos:

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)\{[(x + y = 0 \wedge y + x = 0) \wedge (x + z = 0 \wedge z + x = 0)] \rightarrow y = z]\}$$

<u>Prova</u>: A fórmula é universal. Portanto, por U1 precisamos mostrar que vale a fórmula existencial subsequente para todo x de um grupo qualquer. Seja assim x um elemento arbitrário de um grupo qualquer. Precisamos analisar a validade da fórmula

$$(\exists y)(\forall z)\{[(x + y = 0 \wedge y + x = 0) \wedge (x + z = 0 \wedge z + x = 0)] \rightarrow y = z]\}$$

Sendo uma afirmação existencial, por E1 ela será verdadeira se em qualquer grupo existir de fato um elemento y para o qual a fórmula universal que a segue é verdadeira. Ou seja, precisamos mostrar, novamente por U1 que, nas condições já enunciadas, a implicação dentro da chave vale para o y fixado e para todo z, elemento do grupo genérico considerado. Pela tabela de verdade da implicação, basta então comprovar que, sempre que sua premissa for verdadeira, a conclusão também o será (Por quê?)

Ora, a premissa da implicação em análise é uma conjunção. Uma conjunção só é verdadeira se suas duas sub fórmulas o forem. Assim será necessário admitirmos que as duas fórmulas dentro dos parênteses sejam verdadeiras para qualquer z do grupo genérico considerado, sendo y o elemento desse grupo que existe para um dado x (também genérico) do mesmo grupo. Como grupos satisfazem o Ax3, temos que cada x admite a existência de um y, oposto de x, tal que $x + y = 0 \wedge y + x = 0$. Assim a validade da primeira fórmula da conjunção é garantida pelo Ax3. Basta, portanto também admitir que vale a segunda fórmula para um z arbitrário do grupo considerado para, depois, buscar argumentar sobre a razão de, nessas condições, também valer a conclusão da implicação, ou seja que vale y = z, nas condições consideradas.

Consideremos então um z que também seja oposto do x inicial, para o qual vale que

$$z + x = 0 \quad e \quad x + z = 0.$$

Pelo exercício 7.9 da página 12 (fazendo f(x) indicar a soma de x com o y fixado como oposto do x inicial), temos que: sendo

$z + x = 0$ verdadeiro então $(z+x) + y = 0 + y$ também vale (POR QUÊ?).

Já o Ax1. garante que $(z+x) + y = z + (x+y)$

e o Ax2. que $0 + y = y$.

Portanto, utilizando as igualdades anteriores (observe que a justificativa da validade da próxima igualdade decorre do exercício 10 da página 12 – POR QUÊ mesmo?), podemos concluir pela validade de: $z + (x + y) = y$

Mas, como tínhamos que $x + y = 0$, chegamos a $z + 0 = y$

e, novamente, o Ax. 2, nos dá (P0R QUÊ mesmo?) $z = y$

que é, portanto, verdadeiro, como queríamos demonstrar.

<u>Obs.</u> Esse teorema, uma vez demonstrado para todos os grupos, permite que seja introduzida uma notação para o oposto de um elemento x, por meio de um símbolo funcional unário definido: – x (pois é unívoca associação entre um elemento de um grupo e seu oposto aditivo e, portanto, determina uma função unária do grupo no grupo.

Exercícios:

11) Se um determinado enunciado χ é consequência semântica de um teorema φ de uma Teoria Axiomática, ou seja, se χ é verdadeiro sempre que φ for verdadeiro, mostre que χ também é teorema de mesma teoria axiomática.

12) Prove que, na teoria dos grupos, valem as "leis de cancelamento":
a) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ (x + y = x + z \rightarrow y = z)$
b) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ (y + x = z + x \rightarrow y = z)$

13) No extrato do livro "Os Elementos da Geometria" de Hilbert, distribuído em classe, há o enunciado de alguns teoremas da Geometria de incidência e ordem a partir da teoria axiomática lá descrita.
a) Escreva os enunciados desses teoremas na linguagem formal adotada em classe para tal teoria. (principalmente os teoremas 1 e 2, pag.3 – leiam as provas do 3 e do 4)
b) Mostre que as fórmulas fechadas do item a) são de fato consequências semânticas dos axiomas descritos por Hilbert no texto distribuído em classe, explicitando argumentações capazes de comprovar que elas são de fato teoremas da Geometria de incidência e ordem, tal como Hilbert axiomatizou essa teoria.

14) Pesquise em um livro de teoria dos números (por exemplo no livro "Números: uma introdução à Matemática" de autoria de Polcino, C. e Coelho, S.P., às pp. de 14 a 18, constantes de pdf anexado ao moodle), o conjunto de axiomas para o anel dos números inteiros e verifique que de fato os argumentos utilizados para demonstração de pelo menos dois dos teoremas iniciais da teoria fazem com que tais teoremas sejam de fato "decorrências semânticas" dos axiomas fornecidos no livro. Explique, com suas palavras, quais são os argumentos e por que eles satisfazem a definição dada para teorema nessa apostila.

Até aqui estudamos demonstrações semânticas e a noção de teorema de uma Teoria Axiomática como consequência semântica dos axiomas da Teoria. Vamos também introduzir algumas notações metalinguísticas para as noções trabalhadas, usuais em livros de lógica simbólica. Como sempre em Matemática, esse tipo de notação serve para fixar uma maneira sintética de fazer referência a definições eventualmente longas em português.

Notações metalinguísticas: Seja $\Gamma = \{Ax1, Ax2, ...\}$ o conjunto de axiomas de uma Teoria Axiomática e seja φ uma sentença formulada em sua linguagem formal que seja teorema da Teoria. Nessas condições escreve-se:

$\Gamma \vDash \varphi$ e lê-se: "φ é verdadeira em todos os modelos de Γ"; (ou seja, nos universos onde os axiomas forem verdadeiros segundo interpretações fixadas para os símbolos não lógicos da linguagem)

$Ax1, Ax2,... \Rightarrow \varphi$ e lê-se: "da validade dos axiomas (as fórmulas de Γ) decorre a validade de φ".

Obs.: O símbolo meta linguístico "$\vDash$" designa a relação de consequência semântica da fórmula φ a partir do conjunto Γ de fórmulas e o símbolo "$\Rightarrow$" designa uma implicação semântica (uma abreviação da expressão " se...então", ou seja, designa um símbolo metalinguístico, diferente do conectivo lógico "$\rightarrow$", presente em todas as linguagens formais).

Na prática dos matemáticos esses dois símbolos metalinguísticos são utilizados como sinônimos e ambos indicam a ideia de que "existe uma demonstração semântica para φ a partir das fórmulas de Γ".

Na quarta parte da apostila iremos trabalhar a noção sintática de dedução de fórmulas. Faremos um estudo de tais deduções exclusivamente dentro da Teoria Axiomática do Cálculo de Predicados de 1ª Ordem com Igualdade (CP_1I). Os símbolos da linguagem formal desta teoria são somente os símbolos lógicos, descritos na primeira página da apostila: variáveis, conectivos lógicos, quantificadores e o predicado binário da igualdade. No contexto sintático que iremos estudar na sequência, não poderemos utilizar as noções de verdade ou falsidade de fórmulas em demonstrações. Assim necessitaremos fixar axiomas para a Lógica que descrevam o "bom funcionamento" ou o que vamos entender por "correção" no uso das fórmulas, as propriedades básicas que servem para caracterizar "o significado", para o Cálculo de Predicados como teoria axiomática, dos conectivos e quantificadores. Também iremos descrever as regras sintáticas que definem o que seja uma dedução sintática, ou em que circunstância é possível afirmar que uma fórmula é decorrência sintática de outras, ou ainda, que é dedutível sintaticamente a partir de outras.

Assim, na quarta parte da apostila, faremos a descrição de um sistema de Axiomas para a Lógica de 1ª ordem, ou seja, faremos a descrição da teoria axiomática chamada de Cálculo de Predicados de 1ª ordem. Tais axiomas serão, nesta teoria axiomática, as informações sintáticas oficiais sobre as propriedades ou características básicas do modo como "funcionam" os símbolos lógicos. Também faremos a descrição das regras sintáticas de dedução ou de inferência, que indicarão os procedimentos formais permitidos na teoria para fazer deduções sintáticas e assim obter os teoremas da Lógica Axiomática de 1ª ordem – que são fórmulas obtidas dos axiomas por meio de deduções sintáticas.

Historicamente, o desenvolvimento de uma abordagem sintática para "demonstrações" – aqui chamadas de deduções – visou abolir "interpretações" nas demonstrações, permitindo um tratamento "mecânico", mais isento de "falibilidade humana". Idealmente as deduções sintáticas poderiam ser feitas por computadores devidamente programados com as regras de dedução e alimentados pelos "fatos básicos" – os axiomas da lógica. A máquina, sem emoções, ideologias e isenta de senso comum e seguindo estritamente as regras sintáticas, seria capaz de fazer deduções corretas, sem "cansaço" na busca de caminhos para as provas – e assim garantir a validade sintática dos teoremas. Aliás, comprovando a sensatez desse propósito, podemos observar que foi um computador que "descobriu" uma demonstração muito simples para o teorema dos ângulos da base de um triângulo isósceles, bem mais curta do que a demonstração feita por Euclides nos Elementos.

Em sua prática cotidiana de investigação, porém, os matemáticos garimpam suas ideias e intuições para novos teoremas utilizando muito mais "demonstrações semânticas" ou mesmo "semiformais" do que deduções estritamente sintáticas, estritamente formais. E assim sempre será, já que homens e mulheres não são máquinas! Desse modo fica no ar uma pergunta importante, na busca de uma fundamentação lógica para a Matemática que garanta isenção de paradoxos nesta ciência: toda demonstração semântica pode ser transformada em dedução sintática e vice-versa? Procuraremos voltar a tal questão na quinta parte da apostila!